Linear Stochastic Evolutions とその Dual Process

京都大学大学院理学研究科数学教室 中島誠

今回の講演では修士論文に関わる framework の導入と性質について話したい。

1.Oriented site percolation(OSP)

$\{\eta_{t,y}; (t,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d\}$ を $\{0,1\}$ 値 i.i.d. 確率変数列で $P(\eta_{t,y}=1)=p \in (0,1)$ とする。このような $\eta_{t,y}$ に対して点 (t,y) が open (closed) とは, それぞれ $\eta_{t,y}=1$ $(\eta_{t,y}=0)$ であるときをいうものとする。さらに点列 $\{(s,x_s)\}_{s=0}^t$ が (t,y) への open path であるとは次を満たすときをいう。

$$x_0=0, x_t=y, |x_s-x_{s-1}|=1, \eta_{s,x_s}=1,\ 1 \le s \le t$$

$N_{t,y}$ を点 (t,y) への open path の数とすると、一般の $d \ge 1$ に対して

$$N_{0,x}=\delta_x=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$
$$N_{t,y}=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d,|x-y|=1}\eta_{t,y}N_{t-1,x}$$

で与えられる。

次に、この $N_t=(N_{t,y})_{y\in\mathbb{Z}^d}$ を一般化する。

2.Linear stochastic evolutions

次のように定義される Markov chain $N_t=(N_{t,y})_{y\in\mathbb{Z}^d},\ t\ge 0$ を考える。

$$N_{t,y}=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}N_{t-1,x}A_{t,x,y},\ t\ge 1,\ y\in\mathbb{Z}^d$$

ここで N_0 は各成分が非負かつノンランダムであり $1 \le \sharp\{y\in\mathbb{Z}^d : N_{0,y}>0\}<\infty$ なものとし,$A_t=(A_{t,x,y})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ は各成分が非負な i.i.d. の行列値確率変数列で以下の仮定を満たすようなものとする。

i) 各 $t\ge 1$ に対して列ベクトル $(A_{t,x,y})_{x\in\mathbb{Z}^d},\ y\in\mathbb{Z}^d$ は独立
ii) すべての $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して $E[A_{1,x,y}^2]<\infty$
iii) ある定数 $r_A>0$ が存在して、$|x-y|>r_A$ であれば $A_{t,x,y}=0$ P-a.s.
iv) ある $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して $A_{1,x,y}$ は定数でない。
v) $(s,z)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ に対して、$(A_t\circ\theta_{s,z})_{t\in\mathbb{N}^*}\overset{\text{law}}{=}(A_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$

ここで $A_t\circ\theta_{s,z}=(A_{t+s,x+z,y+z})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$.

このような framework で定義される Markov chain を linear stochastic evolutions と呼ぶことにする。実際に $A_{t,x,y}=\eta_{t,y}\mathbf{1}_{|x-y|=1}$ とおくと OSP はこの framework の中に含まれる。他にも含まれるモデルとして directed polymers in random environment(DPRE)、binary contact path process(BCPP)、voter model(VM) といったものがある。

3.Dual process

Linear stochastic evolutions の $(A_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ の仮定の i) を次のようなものに変えてみる。

i)' 各 $t \geq 1$ に対して行ベクトル $(A_{t,x,y})_{y\in\mathbb{Z}^d}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ は独立

区別するために i)' と ii)〜iv) を満たすような $(A_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ を $(B_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ とあらわすことにする。このような B_t に対して Markov chain $M_t = (M_{t,y})_{y\in\mathbb{Z}^d}$ を次のように定義する。

$$M_{t,y} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} M_{t-1,x}B_{t,x,y} \quad t \geq 1, y \in \mathbb{Z}^d$$

ここで M_0 は N_0 と同じ条件を満たす。このような Markov chain を dual process と呼ぶことにする。

注 Dual process に対して各 $x \in \mathbb{Z}^d$ で $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} B_{t,x,y} \equiv 1$, P-a.s. とすると B_t は $\mathbb{Z}^d$ 上の Markov chain の遷移行列と見ることができる。

Dual process の例として次のものをあげておく。

例 OBP 上の向きつき RW
Oriented bond percolation(OBP) を次のように与える。$\{\eta_{t,x,y}; t \in \mathbb{N}^*, x, y \in \mathbb{Z}^d, |x-y| = 1\}$ は $\{0,1\}$ 値 i.i.d. 確率変数列で $P(\eta_{t,x,y} = 1) = p$ となるものとする。bond $<(t-1,x),(t,y)>$ が open(closed) とはそれぞれ $\eta_{t,x,y} = 1, (\eta_{t,x,y} = 0)$ を満たすときをいうとする。
$\{\eta_{t,x,y}; t \in \mathbb{N}^*, x, y \in \mathbb{Z}^d, |x-y| = 1\}$ に対して $B_{t,x,y}$ を次のように与える。

$$B_{t,x,y} = \frac{\eta_{t,x,y}}{\deg(t-1,x)}\mathbf{1}\{\deg(t-1,x) > 0\}$$
$$\deg(t-1,x) = \sharp\{y \in \mathbb{Z}^d : \eta_{t,x,y} = 1\}$$

$M_0 = \delta_x$ とおくと $M_{t,y}$ は OBP 上の向きつき RW の transition probability をあらわしている。$V(t-1,x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \eta_{t,x,y} = 1\}$ とし、OBP 上の向きつき RW は次のように与える。

(1) 点 $(0,0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ を出発する。
(2) 点 $(t-1,x)$ にいるときに次のステップは

$V(t-1,x) \neq \emptyset$ のときは,$y \in V(t-1,x)$ を一様に選んで、その点に移る。
$V(t-1,x) = \emptyset$ のときは,$(t-1,x)$ で止まる。

4. 性質
この節では linear stochastic evolutions と dual process の性質について述べる。まず記号を導入する。

$$\xi = (\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\text{に対して}, \ |\xi| = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |\xi_x|, \ a_y = E[A_{1,0,y}], \ b_y = E[B_{1,0,y}], \ y \in \mathbb{Z}^d,$$
$$\mathcal{F}_t = \sigma(A_s : 1 \leq s \leq t), \ \mathcal{F}'_t = \sigma(B_s : 1 \leq s \leq t)$$

補題 (N.Yoshida '08)
$|\overline{N}_t| = |N_t|/|a|^t_{y\in\mathbb{Z}^d}$, $|\overline{M}_t| = |M_t|/|b|^t_{y\in\mathbb{Z}^d}$ はそれぞれ $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}'_t$)-martingale であり、ほとんど確実に $|\overline{N}_\infty| = \lim_{t\to\infty}|\overline{N}_t|$, $|\overline{M}_\infty| = \lim_{t\to\infty}|\overline{M}_t|$ が存在し、$E[|\overline{N}_\infty|] = |N_0|$ または 0,

$E[|\overline{M}_\infty|] = |M_0|$ または 0. さらに

$$E[|\overline{N}_\infty|] = |N_0| \Leftrightarrow \ L^1\text{収束する。}$$
$$E[|\overline{M}_\infty|] = |M_0| \Leftrightarrow \ L^1\text{収束する。}$$

注 $E[|\overline{N}_\infty|] = |N_0|$ のとき、regular growth phase

$E[|\overline{N}_\infty] = 0$ のとき、slow growth phase とよぶ。

Linear stochastic evolutions に含まれる DPRE に関してすでに次の結果が得られている。
定理 1 (Bolthausen '89)
$\{\eta_{t,y} : (t, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d\}$ を $\{-1, 1\}$ 値 i.i.d. 確率変数列で $P(\eta_{t,y} = 1) = 1/2$ となるものとする。$0 < \epsilon < 1$ に対して

$$A_{t,x,y} = (1 + \epsilon\eta_{t,y})\frac{\mathbf{1}_{|x-y|=1}}{2d}$$

で $N_{t,y}$ を定義する。$d \geq 3$ で ϵ が十分小さいとき、任意の有界連続関数 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して、ほとんど確実に

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\frac{N_{t,y}}{|N_t|} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\nu$$

ここで、ν は正規分布の確率測度で平均 0、共分散行列が $\frac{1}{d}I$ で与えられるもの。

注 $\rho_t(y) = N_{t,y}/|N_t|$ とおくと、ρ_t は $\mathbb{Z}^d$ 上の確率測度とみなせて定理 1 はこの測度がほとんど確実に正規分布に弱収束することを意味している。

この定理の結果を linear stochastic evolutions と dual process に拡張したものが次のようになる。

定理 2(CLT for linear stochastic evolutions [N '08])
$d \geq 3$ かつ $\sup_{t\geq 1} E[|\overline{N}_t|^2] < \infty$ を仮定する。このとき任意の有界連続関数 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{|\overline{N}_\infty| > 0\}$ 上ほとんど確実に

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f\Big(\frac{x-mt}{\sqrt{t}}\Big)\frac{N_{t,y}}{|N_t|} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\nu$$

ここで $m = (m_1, \cdots, m_d)$ は $m = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} xa_x/|a|$ で定義され、ν は平均 0、共分散が $\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j d\nu = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(x_i - m_i)(x_j - m_j)a_x/|a|,\ 1 \leq i, j \leq d$ で与えられる正規分布の確率測度。

注 $\sup_{t\geq 1} E[|\overline{N}_t|^2] < \infty \ \Rightarrow E[|\overline{N}_\infty|] = |N_0|$

定理 3(CLT for dual process [N '08])
$d \geq 3$ かつ $\sup_{t\geq 1} E[|\overline{M}_t|^2] < \infty$ を仮定する。さらに次の非退化性

$$\text{ある } y, \tilde{y} \in \mathbb{Z}^d,\ y \neq \tilde{y} \text{ に対して } E[B_{1,0,y}B_{1,0,\tilde{y}}] \neq 0,$$

を仮定する。このとき任意の有界連続関数 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{|\overline{M}_\infty| > 0\}$ 上ほとんど確実に

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f\Big(\frac{x - m't}{\sqrt{t}}\Big)\frac{M_{t,y}}{|M_t|} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\nu'$$

ここで $m' = (m'_1, \cdots, m'_d)$ は $m' = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} x b_x/|b|$ で定義され、ν' は平均 0、共分散が $\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j d\nu' = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(x_i - m'_i)(x_j - m'_j) b_x/|b|,\ 1 \le i, j \le d$ で与えられる正規分布の確率測度。

注 各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} B_{t,x,y} \equiv 1$ P-a.s. であるとき非退化性を満たせば常に中心極限定理が成り立つ。

参考文献

[1] Bolthausen, E. : A note on the diffusion of directed polymers in a random environment. Comm. Math. Phys. 123 (1989), no. 4, 529–534.

[2] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N. : Probabilistic analysis of directed polymers in a random environment: a review. Stochastic analysis on large scale interacting systems, 115–142, Adv. Stud. Pure Math., 39, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[3] Nakashima, M. : The Central Limit Theorem for Linear Stochastic Evolutions, in preparation.

[4] Yoshida, N. : Phase Transition for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions, preprint, 2008.

[5] Yoshida, N. : Localization for Linear Stochastic Evolutions, preprint, 2008.