連分数

A. Ya. ヒンチン

（訳：乙部厳己）

第3版への序

A. Ya. ヒンチン（Khinchin）による素晴らしい本のこの（第3）版は、著者の死後すぐに State Press for Physics and Mathematics によって引き受けられたものである。このため、この本は私の頭文字（B.G.）の付けられた文献についての簡単な注意を除けば何の変更もなされていない。

ヒンチンがこの本を書いてからすでに四半世紀が経過しているにも関わらずこの本は未だにそれが書かれたときの新鮮さを失っていない。だからこそこの 10 年でもこの本の多くの版が数多くの国で出版されているのである。さらに計算技術の新しい手法を開発するという枠組みの中で、連分数を含む計算アルゴリズムに関して自然な興味が起こってきている。この線に沿っては A. N. コヴァンスキー（Khovanskii）による便利な冊子、Prilozhenie tsepnykh drobei i ikh obobshcheniĭ kvoprosam priblizhennogo analiza（「連分数の応用と近似解析の問題への一般化」）が 1956 年に出版されている。ヒンチンはこれとは別の目的ではあったかもしれないが、この本は未だに連分数のアルゴリズム研究への素晴らしい導入であると同時に、数の測度論的問題の深くかつ興味深い問題を提供している。ヒンチンは多くの時間をこの理論を発展させることに費やしてきた。ある点においてはこの本にある 3 つの章は彼の研究結果だといって過言でなかろう。

25 年前にこの本は多くの読者を魅了したが、これからもそうして広く読まれることを望む。

B. V. グネデンコ（Gnedenko）

第2版への序

この版は初版とあまり変わっていない。ロシアにおいては初版の出版から今まで連分数に関する冊子は出版されていない。連分数を含むより一般的な数論に関しては D. A. グラヴァ（Glava）, V. A. ヴェンコフ（Venkov）, I. V. アーノルド（Arnold）たちの仕事が言及されてよいかもしれない。

A. ヒンチン

1949 年 10 月

初版の序

連分数の理論は解析学、確率論、力学、そして何よりも数論において最も重要な道具の一つともいってよい特別な方法である。この基本的な教科書の目的は読者にいわゆる**正則な**連分数、つまり次のような形の分数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

について精通してもらうことにある。ただし普通はすべての元 $a_i (i \geq 1)$ は正の整数であると仮定しておく。この最も重要でありまた系統的に研究されている形の連分数はほとんどすべての数論的また多くの解析的応用の基礎となるものである。

著者は連分数の理論の基礎的小冊子が必要だと感じている。なぜならこの理論は以前は中級の数学課程に含まれていたにもかかわらず、現在ではそこから抜け落ち、そしてもはや基礎的な代数の教科書にも含まれなくなってきているからである。一方において、より高度なカリキュラムもまた（大学の数学科ですら）この理論を扱っていない。

この冊子はその空白を埋めるべく書かれているので、この冊子の内容は基礎的であり、また可能な限り取り付きやすく書かれている必要がある。だから、この本の形式はその目的に沿って作成されている。しかし内容はどんな応用にも必ず必要となるといったような制限を受けているわけではない。この注意は主として最後の章全体にあたる。最終章では連分数に関する測度論（あるいは確率論）的な基礎を含んでいる。これはほとんどすべてソヴィエトの数学者たちによって開拓された重要な新分野である。また、その注意は第 2 章においても多くの項目に適用されている。そこではこの基礎的な枠組みの中で無理数の数論的性質を研究するときに連分数という仕組みが基礎的な役割を果たすということを強調しようとしている。もしも連分数の基礎理論というものがそれのみを内容として出版されるというときに、現在の研究の大きな主題となっている部分に触れないということは大変恥ずべきことだろうと思うからである。

扱う内容に関していえば、学ぶことの「形式的」部分は特別な準備的章に含まれているということをいっておく必要があるだけであろう。この章においては連分数の成

分は任意の正の数（整数とは限らない）と仮定されている。またしばしば、より一般的に、単に独立な変数のこともある。こういう準備の仕方というものの弊害は、学びつつあるものの形式的な性質が、それ自身の考えるべき主題よりも早いうちに読者に提出されてしまい、分離されてしまうということにある。これは教育的立場からすれば間違いなくよろしくない。

そうはいっても、方法論的な正確さはこのやり方によって大いに達成される（読者は連分数のどの性質がその仕組みそのものの構造から決まることであり、またどれが要素が整数であるという仮定の下でだけ成り立つことなのかを直ちに理解することができるから）。また、そのように分けてしまって解説することによって、すでに準備しておいた形式的な基礎の上に数論（これはこの理論の主題である）を続けて構築することが可能となる。だから読者は、純粋形式的な考察という脇道にそれてしまうことなく扱われる主題を詳細に調べるという内容に集中できると思う。

A. ヒンチン

モスクワ　1935 年 2 月 12 日

目 次

第1章　仕組みが持っている性質

1　導入

次のような形式：

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{1}$$

を**正則**（regular）な、あるいは**単純**（simple）な連分数（continued fraction）という。記号 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は、最も一般的な取り扱いをするときには、独立な変数であると仮定する。特別な場合には、これらの変数はある指定された領域の値のみをとると仮定してよい。従って $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は実数または複素数、あるいは一変数関数、多変数関数などと仮定してもよい。この本の目的では、$a_1, a_2, \ldots$ は常に正の整数であると仮定する。ただし a_0 については任意の実数とする。これらの数のことを、与えられた連分数の**要素**（element）であるという。要素の個数は有限であるか、または無限であるとする。最初の場合には与えられた連分数を

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \tag{2}$$

と書くことにして、**有限**（finite）な連分数、より正確に言えば n 階の連分数という（だから、n 階の連分数は $n+1$ 個の要素を持つ）。第 2 の場合については連分数を (1) のような形に書き、**無限**（infinite）連分数という。

有限の連分数というのは、その要素に対する有限回の有理的な操作の結果である。従って要素に関する前述の仮定の下で、すべての有限連分数は何かある実数に等しい。特に、すべての要素が有理数であるなら、その連分数自身もまた有理数になる。一方において無限連分数に対しては何かある実数が対応しているということはすぐにはわからない。何かある取り決めを実行するまでは、それは単なる形式的な記号に過ぎないということにしておく。それは形式的冪級数において収束するか発散するかを議論

しないということと同様である。もちろん、それはいうまでもなく数学的な研究対象になりうることである。

記述を簡明にするという技術的な問題から、無限連分数 (1) を次のような形

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \tag{3}$$

で書くことを許してほしい。そして有限連分数 (2) を

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \tag{4}$$

と書くことにしよう。

$0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、連分数

$$s_k := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

のことを連分数 (4) の**断片**（segment）と呼ぶことにする。同様にして、任意の $k \geq 0$ に対して s_k を無限連分数 (3) の断片と呼ぶ。明らかにどんな（無限でも有限でも）連分数の断片 s_k 自身は有限連分数である。また次の連分数

$$r_k := [a_k; a_{k+1}, \ldots a_n]$$

を有限連分数 (4) の**剰余**（remainder）と呼ぶことにする。同様にして

$$r_k := [a_k; a_{k+1}, \ldots]$$

を無限連分数 (3) の剰余と呼ぼう。明らかに有限連分数の剰余は有限連分数であり、無限連分数の剰余は無限連分数である。

有限連分数に対しては

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (0 \leq k \leq n) \tag{5}$$

が従う。無限連分数に対してはただ（自明な）形式的表現としてのみ同様の関係

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (0 \leq k \leq n)$$

を書き下すことができる。右辺に現れる r_k は無限連分数であり、それは定まった数値を持っているわけではないからである。

2　収束子

　有限連分数

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

はその要素の有限回数の有理的操作であるから、それらの要素の有理関数であり、それ故、整数係数の $a_0, a_1, \ldots, a_n$ に関する 2 つの多項式の比：

$$\frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}$$

として表現できる。もし要素が数値を持っているならば、連分数は通常の分数 p/q の形で表現できる。しかし、いうまでもなく、このような表現は一意的ではない。ここから先は、有限連分数を単純な分数の形で明確に表現しておくことが重要となる。それを**正準**（canonical）表現と呼ぶ。

　そこで、0 階の連分数、

$$[a_0] = a_0$$

に対して正準表現として分数 $a_0/1$ を採用することにしよう。ここで、n 階未満の連分数に対して正準表現が定義されているとする。すると (5) から n 階連分数について

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

となる。ただし、ここで

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

は $(n-1)$ 階連分数で、従って仮定によって正準表現がすでに定義されているものである。そこで、それを

$$r_1 = \frac{p'}{q'}$$

と書くことにしよう。すると

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}$$

となる。そしてこの最後の分数を連分数 $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ の正準表現として採用する。すると

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p}{q}$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{p'}{q'}$$

と置くことによって正準表現の分子と分母を次のように書き下すことができる。

$$p = a_0 p' + q', \quad q = p' \tag{6}$$

これによってすべての階数の連分数について正準表現が一意的に定義できた。

連分数の理論においては与えられた（有限または無限の）連分数 $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ の断片の正準表現が特別に重要な役割を果たす。そこで断片

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

を考えて、その正準表現を p_k/q_k と表わす。そしてそれを α の k 階の**収束子**（convergent）または近似子（approximant）と呼ぶことにしよう。この概念は有限と無限の両方の連分数に対して全く同じようにして定義されている。ただ異なる点は有限連分数は有限個の収束子しか持たないが、無限連分数は無限個持っているということである。n 階の連分数 α に対しては明らかに

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha$$

であり、$n+1$ 個の（階数 $0, 1, 2, \ldots, n$ の）収束子を持っている。

定理 1（収束子の形の規則）. $k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned} \tag{7}$$

が成立する。

証明. $k = 2$ のとき、式 (7) は容易に直接確認できる。そこですべての $k < n$ に対して正しいと仮定しよう。そうして連分数

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

を考え、その r 階の収束子を p'_r/q'_r で表わす。公式 (6) によって

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \\ q_n &= p'_{n-1} \end{aligned}$$

であり、仮定から

$$\begin{aligned} p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} \\ q'_{n-1} &= a_n q'_{n-2} + q'_{n-3} \end{aligned}$$

が成り立つから（ここで a_{n-1} でなく a_n であることに注意せよ。連分数 $[a_1; a_2, \ldots a_n]$ は a_0 でなく a_1 から始まるからである）(6) によって

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q_{n-3}) \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} q_{n-2} \end{aligned}$$

であり、証明が終わる。 □

これらの漸化式 (7) は n 階収束子の分子と分母を、要素 a_n とその前 2 つの収束子の分子と分母によって表わしており、連分数の全理論の形式的な基礎を提供している。

注意 1. ときとして階数 -1 の収束子を考えるのが都合のよい場合がある。そのときには $p_{-1} = 1$ で $q_{-1} = 0$ とおく。明らかにこの約束によって（そしてそのときに限って）公式 (7) は $k = 1$ に対しても成立するようになる。

定理 2. すべての $k \geq 0$ に対して

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k \tag{8}$$

が成立する。

証明. (7) の最初の式を q_{k-1} 倍し、第 2 式を p_{k-1} 倍する。そうして最初の方をを第 2 の方から引くと

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2})$$

であり、

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1$$

であるから定理は証明された。 □

系 1. すべての $k \geq 1$ に対して

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}} \tag{9}$$

が成立する。

定理 3. すべての $k \geq 1$ に対して

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$$

が成立する。

証明. (7) の最初の式を q_{k-2} 倍し第 2 の式を p_{k-2} 倍する。そして第 2 の方から最初の方を引く。すると定理 2 に基づいて

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k$$

であり、証明が終わった。 □

系 2. すべての $k \geq 2$ に対して

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}} \tag{10}$$

が成立する。

我々が今得た単純な結果によって、与えられた連分数の収束値の相対的な値に関するある大変に重要な結論を簡単に導くことができる。とりわけ、(10) によれば偶数階の収束子は増大列であり、奇数階の収束子は減少列である。従ってこれらの 2 つの列は互いに近づく（これらすべては a_1 以降の要素が正だという仮定を用いている)。従って (9) によるとすべての奇数階収束子はその直後にある偶数階収束子よりも大きい。だから、すべての奇数階収束子はすべての偶数階収束子よりも大きい。従って次のような結論を得ることができる。

定理 4. 偶数階の収束子は増大列をなし、奇数階の収束子は減少列をなす。また、すべての奇数階収束子はどんな偶数階収束子よりも大きい。

特に明らかなように、有限連分数 α に対してはすべての偶数階収束子は α よりも小さく、奇数階収束子は α よりも大きい。（もちろん、最後の収束子は α に等しいから、それは除いてである）

この節を終えるにあたって、収束子の分子と分母に関する、2 つの単純な、しかし格別に重要な命題を示しておく。

定理 5. 任意の k $(1 \leq k \leq n)$ に対して

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}} \tag{11}$$

が成立する。ただし p_i, q_i, r_i は左辺の連分数に関するものとする。

証明. (5) から

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k]$$

である。右辺の連分数は $(k-1)$ 階の収束子 p_{k-1}/q_{k-1} を持つ。それの k 階の収束子 p_k/q_k は連分数自身に等しい。そして (7) によれば

$$p_k = p_{k-1}r_k + p_{k-2}, \quad q_k = q_{k-1}r_k + q_{k-2}$$

であり定理は示された。 □

定理 6. 任意の $k \geq 1$ に対して

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1]$$

である。

証明. $k = 1$ に対してはこの関係は $q_1/q_0 = a_1$ であるから明らかである。$k > 1$ であり

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1] \tag{12}$$

であると仮定しよう。(7) によれば

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

であり、従って

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right]$$

である。従って式 (5) と (12) によれば

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots a_1]$$

であり証明が終わる。 □

3　無限連分数

無限連分数

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \tag{13}$$

に対しては収束子の無限列

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}, \ldots \tag{14}$$

が対応している。すべての収束子は何かの実数である。もし列 (14) が収束しているなら、つまりそれがある一意な極限 α を持っているなら、その数 α を連分数 (13) の「値」であると考えて

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

と書くことは自然である。そのとき連分数 (13) 自身もまた**収束する**（converge）という。もし列 (14) が定まった極限を持たないのであれば連分数 (13) は発散するという。

性質の多くの部分では、収束する無限連分数は有限連分数に似ている。この類似をさらに拡張することを可能にする基礎的事実が次の定理である。

定理 7. もし無限連分数 (13) が収束するなら、その剰余もまたすべて収束する。逆に、無限連分数 (13) の少なくとも一つの剰余が収束するなら、その無限連分数自身が収束している。

証明. 連分数 (13) の収束子を p_k/q_k と書くことにし、その剰余の何でもいいので一つ、たとえば r_n を p'_k/q'_k と書くことにしよう。すると (11) によって

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}} \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

従って直ちに剰余 r_n が収束するなら、つまり $k \to \infty$ のときに分数 p'_k/q'_k が再び r_n と書くことにする極限へと近づくなら分数 p_{n+k}/q_{n+k} もまた極限

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \tag{16}$$

へと収束する。(15) を p'_k/q'_k について解くことによって収束を確認でき、従って定理の証明が終了する。 □

式 (16) は、収束する無限連分数に対してたった今確認したところのものであるが、有限連分数に対して以前示した (11) の全くの類似物である。同様にして定理 5 の類似もまた無限連分数に対して成立する。

収束する無限連分数に対する次の命題は前節の定理 4 から直ちに従う。

定理 8. 収束する無限連分数の値はすべての偶数階収束子よりも大きく、奇数階収束子よりも小さい。

さらにこの定理の元で、前節の定理 2 の系から次の結果が従う。これは連分数の理論の数論的応用において基本的役割を果たす。

定理 9. 収束する連分数 (13) の値 α は任意の $k \geq 0$ に対して次の不等式[1]を満たす：

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

明らかに定理 (9) は一つの例外 $k = n-1$ の場合を除いてはすべての $k < n$ に対して有限連分数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

に対しても成り立つ。例外のときには $\alpha = p_n/q_n$ だから不等号は等号になる。もし α が収束する無限連分数 (13) の値であるなら、その連分数の要素のことを**数 α の要素**ということにする。同様に連分数 (13) の収束子、断片、剰余のことを数 α の収束子、断片、要素と呼ぶことにする。定理 7 に基づけば収束する無限連分数 (13) のすべての剰余は確定した実数値を持つ。

無限級数の場合のように、連分数が収束するかどうかを判定する確認法が存在するかどうかは自然な問題として持ち上がってくるだろうが、実は我々の考えている場合、つまりすべての $i \geq 1$ に対して $a_i > 0$ を満たす場合にはきわめて単純で便利な確認法が存在する。

定理 10. 連分数 (13) が収束する必要十分条件は、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

が発散することである。

証明. 定理 4 から明らかなように無限連分数が収束する必要十分条件は定理 4 に現れる 2 つの列が同じ極限を持つことである。（定理 4 から明らかにそれらの 2 つの列はそれぞれ極限を持つ。）そして式 (9) が示すように、これは

$$q_k q_{k+1} \to \infty \quad (k \to \infty) \tag{18}$$

となっているときであり、またそのときに限る。つまり、(18) が無限連分数が収束する必要十分条件である。

そこで、(17) が収束すると仮定しよう。すると (7) の第 2 式により

$$q_k > q_{k-2} \quad (k \geq 1)$$

[1]我々の仮定の下で、すべての $k \geq 0$ に対して $q_k > 0$ であることを注意しておく。($q_0 = 1$ であり $q_1 = a_1$ であるから、式 (7) の 2 番目の部分から帰納法によってすべての $k > 1$ に対して $q_k > 0$ である。)

である。従って、任意の k に対して $q_k > q_{k-1}$ であるか $q_{k-1} > q_{k-2}$ のいずれかが成立する。最初の場合には (7) の第 2 式によれば

$$q_k < q_k q_k + q_{k-2}$$

であり、従って十分に大きな k に対して（$a_k < 1$ のとき、(17) の級数が収束するから、それは $k \geq k_0$ の場合でなければならない）

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k}$$

である。第 2 の場合については同じ公式から $a_k < 1$ に対して

$$q_k < (1 + a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k}$$

が成り立つ。従ってすべての $k \geq k_0$ に対して

$$q_k < \frac{1}{1 - a_k} q_l$$

が $l < k$ に対して成り立つ。もし $l \geq k_0$ であれば同じ不等式を q_l に対して適用することができる。

この論法を続けることで我々は次の不等式を得る。

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_l) \cdots (1 - a_r)} \tag{19}$$

ただし、$k > l > \cdots > r \geq k_0$ であり $s < k_0$ である。ところが (17) の級数が収束すると仮定しているのだから無限積

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1 - a_n)$$

は、知ってのように、収束する。つまり、それは正の値をとり、それを λ と書くことにする。明らかに

$$(1 - a_k)(1 - a_l) \cdots (1 - a_r) \geq \prod_{n=k_0}^{\infty} (1 - a_n) = \lambda$$

従って $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0 - 1}$ の中の最大のものを Q と書くことにすれば不等式 (19) から

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geq k_0)$$

を得るので、結果として

$$q_{k+1}q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geq k_0)$$

となり関係式 (18) は決して成り立たない。従って与えられた連分数は発散する。

逆に級数 (17) が発散すると仮定しよう。$q_k > q_{k-2}$ がすべての $k \geq 2$ に対して成り立っているから、q_0, q_1 の最小のものを c と書くことにすれば、$k \geq 0$ に対して $q_k \geq c$ が成立する。従って (7) の第 2 式から

$$q_k \geq q_{k-2} + ca_k \quad (k \geq 2)$$

となる。この不等式を逐次適用して

$$q_{2k} \geq q_0 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n}$$

かつ

$$q_{2k+1} \geq q_1 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n+1}$$

が成り立ち、結果として

$$q_{2k} + q_{2k+1} > q_0 + q_1 + c\sum_{n=1}^{2k+1} a_n$$

が成り立つ。言い換えればすべての k に対して

$$q_k + q_{k-1} > c\sum_{n=1}^{k} a_n$$

が成り立つ。

我々はすでにこの不等式が奇数の k に対して成り立つことを示したが明らかに偶数の k に対しても同じ方法によって証明することができる。すると少なくとも積 $q_k q_{k-1}$ の一つの要素が $\frac{1}{2}c\sum_{n=1}^{k} a_n$ を越え、そして他の要素が c よりも小さくなるということはあり得ないのだから、

$$q_k q_{k-1} > \frac{c^2}{2}\sum_{n=1}^{k} a_n$$

となる。(17) の級数は発散すると仮定したので、これは関係式 (18) を意味し、結果として与えられた連分数が収束することを意味する。これで定理 10 の証明は完了した。 □

4　自然数要素の連分数

ここからこの本の終わりまで要素 $a_1, a_2, \ldots$ は自然数、つまり正の整数であると仮定し、a_0 は正とは限らない整数であるとする。もしそのような連分数が無限型のものであるならば定理 10 によってそれらは収束する。従って我々は扱う連分数が収束していると自由に仮定することができ、その「値」について語ることができる。もしその連分数が有限型であれば、そしてもしその最後の要素 (a_n) が 1 であれば明らかに $r_{n-1} = a_{n-1} + 1$ は整数である。従ってこの場合には与えられた n 階の連分数 $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$ を $(n-1)$ 階の連分数 $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1]$ として書くことができ、このときには明らかに最後の要素は 1 より大きい。

この事実によって以下のすべての議論においては、最後の要素が 1 に等しい有限連分数は除外しておくことができる（もちろん、0 階の連分数 [1] だけは例外である)。これは連分数による数の表現の一意性を議論するときに重要な役割を担う（第 2 章第 5 節を見よ)。

明らかに、収束子の分子と分母は、今考えているものについては、整数である。(p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 に関しては直ちにわかる。残りの収束子については (7) から従う。) さらに次の大変重要な命題がわかる。

定理 11. すべての収束子は既約（irreducible）である。

この証明は公式 (8) から直ちに従う。p_n と q_n の任意の公約数は同時に $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$ の約数でなければならないからである。

(7) の第 2 式から $k \geq 2$ に対して $q_k > q_{k-1}$ がわかるから、従って列

$$q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots$$

は常に増大列であるが、q_k の増大度に関してもっと強い命題を示すことができる。

定理 12. 任意の[2]$k \geq 2$ に対して

$$q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$$

である。

証明. $k \geq 2$ に対して

$$q_k \;\; a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}$$

[2] ここで、または今後において、有限連分数のときには q_k が意味をなすような k についてのみ考えている。

であるから、この不等式を繰り返し用いて

$$q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k, \quad q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k$$

であり、定理を得る。従って収束子の分子は少なくとも幾何数列と同じくらい速く増大する。 □

中間分数（intermediate fractions）　$k \geq 2$ とし、i を任意の負整数とする。差

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}}$$

は、簡単にわかるように

$$\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]}$$

に等しく、k の偶奇のみに依存して、すべての $i \geq 0$ に対して同じ符号を持つ。これから分数

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \tag{20}$$

は偶数の k に対しては増大、奇数の k に対しては減少列となる（定理 4 を見よ）。この列の最初と最後の項は共に偶数階か、共に奇数階の収束子である。その間にある項は（もしあれば、つまり $a_k > 1$ なら）**中間分数**（intermediate fractions）と呼ぶ。数論的応用においてはこれらの中間分数は（収束子ほどの重要性ではないが）重要な役割を果たす。それら互いの性質や発展的な構造の法則をより明らかにするためには 2 つの分数の間の、いわゆる**中間数**（mediant）の概念を導入しておくのが便利である。正の分母を持つ 2 つの分数 $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ の中間数とは分数

$$\frac{a+c}{b+d}$$

のことである。

補題 1. 2 つの分数の中間数は常にそれらの分数の間に値を持つ。

証明. $a/b \leq c/d$ と仮定しておこう。すると $bc - ad \geq 0$ である。だから

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \leq 0$$

となり証明が終わる。 □

(20) の列に現れるそれぞれの中間分数は直前の分数と分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ との中間数であることが直ちにわかる。列 (20) を使い逐次中間数を作っていけば、収束子 p_{k-2}/q_{k-2} から収束子 p_{k-1}/q_{k-1} の方向へ進んでいくことができる。この列は作られた中間数が p_k/q_k に等しくなったときに終了する。定理 4 からわかるように、この最後の分数は p_{k-1}/q_{k-1} と p_{k-2}/q_{k-2} の間にあるまた連分数の値 α は p_{k-1}/q_{k-1} と p_k/q_k の間かつ p_{k-2}/q_{k-2} と p_k/q_k の間にあり、それらは両方とも偶数階か両方とも奇数階かのどちらかであって、数 α の同じ側にある。これから、列 (20) のすべての項は α の同じ側にあるということがわかり、分数 p_{k-1}/q_{k-1} は別の側にあることがわかる。特に、分数 $(p_{k-1}+p_{k-2})/(q_{k-1}+q_{k-2})$ と p_{k-1}/q_{k-1} は常に α の逆側にある。言い方を変えれば、**連分数の値は常に、任意の収束子と、その直前の収束子とそれとの中間数との間にある。**（読者はこれらの数のお互いの位置関係について絵を描いてみることを勧める。）

この注意によると、我々が収束子 p_{k-2}/q_{k-2} と p_{k-1}/q_{k-1} とを知っていたときに、要素 a_k を知らなくても次の収束子 p_k/q_k をどうやって作り出すことができるか、という方法がわかる（ただし連分数 α の値についての知識は使う）。すなわち、まず最初に与えられた 2 つの分数の中間数をとる。それからこの中間数と p_{k-1}/q_{k-1} との中間数をとる、など、ちょうど得られた中間数と分数 p_{k-1}/q_{k-1} との中間数をとる。こうして作っていった中間数が最初は α を近似するということはすでに知っている。**このやり方で作っていった、α に関して最初の分数 p_{k-2}/q_{k-2} と同じ側にある最後の中間数が p_k/q_k である。**なぜなら、すでに知っているように p_k/q_k は中間数の列の中のどこかにあるのであって、α に関して p_{k-2}/q_{k-2} と同じ側にあるからである。従って残った示すべきことは続く中間数が α の逆側にあるということだけである。ところが最後の中間数は $(p_k+p_{k-1})/(q_k+q_{k-1})$ であり、上の注意によれば、それは実際に α に関して逆側にある。

もう一つ、より重要な α およびその収束子と中間分数の間の相対的な位置についてわかることがある。中間分数 $(p_k/p_{k+1})/(q_k+q_{k+1})$ は、それが p_k/q_k と α の間にあるのだから、α よりも p_k/q_k に使い。つまり、

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\left|\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{1}{q_k(1_k+q_{k+1})}$$

となっている。（等号はここでは達成できない。なぜなら、等号なら

$$\alpha=\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}},\quad a_{k+2}=1$$

となり、従って α は最後の要素が 1 であるような有限連分数であるが、このようなものは我々は考察から除外しているのであった。）

そこで我々は次の重要な結論を得た。

定理 13. すべての $k \geq 0$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} \tag{21}$$

である。

この不等式は、$|\alpha - (p_k/q_k)|$ の差の**下**側の限界を与えるものであって、同じ差の上側からの限界を与えた定理 9 の不等式を補うものである。

第2章　連分数による数の表現

5　実数の表現機構としての連分数

定理 14. 任意の実数 α に対して、α に等しい値を持つ連分数が一意に存在する。この連分数は、もし α が有理数なら有限であり、無理数なら無限である[1]。

証明. α を超えない最大の整数を a_0 と書く。もし α が整数でないなら関係

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

によって r_1 を決めることができる。ここで

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1$$

だから、明らかに $r_1 > 1$ である。一般的に、もし r_n が整数でないなら a_n を r_n を超えない最大の整数として、数 r_{n+1} を関係

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}} \tag{23}$$

によって定める。この手続きは r_n が整数でない間続けることができる。ここで明らかに $r_n > 1$（$n \geq 1$）である。

式 (22) によれば

$$\alpha = [a_0; r_1]$$

である。そこで一般に

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n] \tag{24}$$

であると仮定しよう。すると式 (5) と (23) から

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}]$$

[1]読者は、考えている連分数が整数の要素を持つものであること、$i \geq 1$ なら $a_i > 0$ であること、さらに有限連分数の最後の要素は 1 ではないことを思い出すように。

であり、従って (24) はすべての n に対して正しい（もちろん $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ は整数でないと仮定している)。

もし α が有理数であるなら、すべての r_n は明らかに有理数である。この場合、我々の手順は有限回行った後で止まってしまうことが簡単にわかる。もし、たとえば、$r_n = a/b$ であったとしよう。すると

$$r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b}$$

である。ただし $r_n - a_n < 1$ だから $c < b$ である。式 (23) によれば、

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

である。（もし c が 0 でないなら。つまり、もし r_n が整数でないなら。もし r_n が整数であったならば我々の主張はすでに示されていることになる。）従って r_{n+1} は r_n のりも小さな分母を持つことになる。これから、もし $r_1, r_2, \ldots$ を考えると、いつかは $r_n = a_n$ となることがわかる。しかしこの場合には (24) によると α は有限の連分数によって表されているから、最後の要素は $a_n = r_n > 1$ である。

もし α が無理数なら、すべての r_n は無理数であり、我々の手続きは無限に続く。そこで

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

をおくと（ただし p_n/q_n は既約分数で $q_n > 0$)、(24) と第 1 章の (16) から

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

であるが、他方においては明らかに

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}$$

であり、結果として

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}$$

であり、最終的に

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}$$

である。従って

$$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha \quad n \to \infty$$

であるが、これは無限連分数 $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ が与えられた α という値を持つことを示している。

従って任意の数 α が連分数として表現できることが示された。この分数はもし α が有理数なら有限であり無理数なら無限である。残りは我々の得た展開が一意であることを示すことである。一意性は本質的には第 1 章の第 4 節の考察から導き出されることを注意しておく。そこでは、いったん連分数の値がわかると、その収束子をうまく作り出すことができ、従ってすべての要素が作り出されるということをみた。しかしながら、一意性の問題はもっと単純なやり方で導くことができる。そこで

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a'_0; a'_1, a'_2, \ldots]$$

としよう。ただし 2 つの連分数はそれぞれ有限または無限であるとする。また $[x]$ によって x を超えない最大の整数を表すことにしよう。まず最初に $a_0 = [\alpha]$ であり、$a'_0 = [\alpha]$ であることは明らかである。従って $a_0 = a'_0$ である。さらに、もし

$$a_i = a'_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

が示されたとするならば、同様の記号によって

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p'_i \\ q_i &= q'_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

であり、第 1 章の式 (16) から

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p'_n r'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n r'_{n+1} + q'_{n-1}} = \frac{p_n r'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r'_{n+1} + q_{n-1}}$$

となって結果 $r_{n+1} = r'_{n+1}$ となる。$a_{n+1} = [r_{n+1}]$ であり $a'_{n+1} = [r'_{n+1}]$ であるから $a_{n+1} = a'_{n+1}$ である、つまり、2 つの分数は完全に一致する。 □

上の議論は、もし有限連分数の最後の要素が 1 に等しければ適用できないということに注意しておこう。もし、たとえば a_{n+1} がそのような要素であると仮定してみれば $r_n = a_n + 1$ であり $a_n \neq [r_n]$ である。

これで実数が連分数で一意に表現できるということを示すことができた。こうした表現ができるということの基礎的な重要性というのは、もちろん、実数を表現する連分数がわかれば、あらかじめ任意に与えられた精度でその数を決定できるという事実にある。従って、連分数という仕組みは、少なくとも原理的には、たとえば 10 進や体系的分数（つまり、ある計算の体系に基づいて作られた分数）に似た実数の表現がその役割であるといえる。

では、非常に広く用いられている体系的な分数と比べて、実数表現という意味で、連分数が持つ基本的な長所と短所は何であろうか。この質問に答えるためには、まず最初にそのような表現によって可能な、あるいは果たすべき要望を明確にしなければならない。明らかに、最初の、また**理論的**な要望は、この仕組みが可能な限りそれが表現する実数の性質を反映すべきということであり、結果としてそういう性質がこの仕組みによって数を表現したときに可能な限り完全かつ単純に現れるということである。

この最初の要望に対しては、体系的な（そして特に 10 進の）分数に比べれば連分数には否定できず、またすばらしい利点がある。それはこの章を進めながら徐々に明らかになってくる。実際、ある程度は天下り的に考えることですら明らかである。体系的分数というのはある計算の体系に結びついている。だから、それはその表現しようとしている数の絶対的な性質だけではなくて特定の計算体系との関係が反映してくるということは避けられない。ところが連分数というのはどんな計算の体系にも結びついていない。つまり、表現しようとしている数の性質を純粋な形で表している。だから、すでにみたように表現する実数が有理数であるか無理数であるかは、対応する連分数の有限あるいは無限性によって完全にわかってしまう。すでに知っているように体系的分数ではこういう確認はかなり面倒である。分数の有限性や無限性はその分数自身の性質だけではなく、選ばれた計算体系との関係との関係が非常に深く関わってくるからである。

しかしながら、今述べたような理論的な要望に加えて、ある種の**実用性**は数表現機構に対していつも要請される。（ある種の実用性への考察はある種の理論的価値を持つことがある。）従ってこの仕組みが、表現しようとしている数に対して、任意に指定された精度で近似しているような値を見つけることが可能であり、またできるだけ簡単であるということは大いに重要なことである。連分数の仕組みというのはこの要望にもかなりの程度で応えることができる（さらにどの場合にせよ体系的分数の仕組みよりはよい)。実際すぐにわかるように連分数で与えられる近似値というのは、ある極めて単純かつ重要な意味で、**最良近似**性を持っているのである。

ところが、もう一つの、しかももっと重大な実用的要請であって、連分数の機構がそれには全く応えることができないというものもある。数の表現を知ったら、次にはその数に関する単純な関数の表現を比較的簡単に知りたい（特に和や積など)。簡単に言えば、実用的という観点から見れば、数の表現は数の演算に対して十分単純な規則を持っているべきである。そうでなければ計算の道具としては使えない。体系的分数というのがどれほどこの目的には便利であるかということはよく知られている。一方で連分数には代数的計算という目的に適用できる実用的規則というものが存在しない。連分数で表現された数の和を求めるということですら驚くほど複雑であり、計算

の実用という点では使い物にならないのである。

体系的な分数と比較したときの連分数の長所と短所は、これら 2 つの表現を使用すべき分野を（かなりの程度）決めている。計算においては体系的分数はほとんど例外なく用いられている一方で、連分数の仕組みはその第一の応用分野として実数の数論的法則やそれぞれの無理数の数論的性質を調べることにある。連分数の仕組みは理論的な研究については代替不能な手法であり、その主たる目的はすべてこの目的のための応用からくる。

6　最良近似としての収束子

ある無理数 α を通常の有理分数で（指定された誤差の許容範囲で）表現するためには α を表現する連分数の収束子を用いるのが自然である。その近似の程度は第 1 章の定理 9 や 13 で与えられている。つまり

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

である。

無理数を有理数で近似するという問題は、最も簡単な形としては、与えられた無理数とは異なる分数で、指定された値未満の最小の（正の）分母を持つ分数を見つけるということである。この問題は α が有理数の場合ですら意味を持つ。たとえば α は大変に巨大な分母と分子を持つ分数であるとしよう。この分数をより小さな分母と分子を持つ分数で近似したい。純粋に実用的な観点から見れば、これら 2 つの場合（α が有理数か無理数か）というのは実際的には差がない。なぜなら、実用的にはすべての数はただある誤差の範囲でのみ与えられているからである。

直ちに明らかなように、体系的分数というのはこの問題を解決するためには全く向いていない。なぜなら近似する分数の分母というのは選ばれた計算の体系から決まってしまうものだからである（10 進分数なら 10 のベキ乗である）。だから分母は表現された数の数論的性質からは完全に独立なものである。一方で連分数の場合には収束子の分母というのは表現された数から完全に決まる。従って、これらの収束子が（それらが数の表現法に密接かつ自然に関係していて、それから完全に決まるのだから）有理分数で数を最もよく近似する[2]という問題に対して重要な役割を持っていると期待する十分な理由がある。

[2]無理数を表現する 2 つの興味深いアルゴリズムが M. V. Ostrogradskiĭによって彼の死の直前に進められた。この問題に対する彼の簡単なノートはいくつかの論文としてウクライナの科学アカデミーの論文書庫にある。これらのノートは E. Ya. Remez の論説 “O znakoperemennykh ryadakh, kotorye mogut byt’svyazany s dvumya algorifmami M. V. Ostrogradskogo dlya priblizheniya irratsional’nykh chisel”（M. V. Ostrigradskiĭによる無理数近似の 2 つのアルゴリズムに関係するかもしれない交代級

さて、有理分数 a/b（$b > 0$）は、分母がそれ以下のいかなる有理分数でも α との差が大きくなるとき、言い換えれば不等式 $0 < d \leq b$ かつ $a/b \neq c/d$ ならば

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

となるならば、それを実数 α の**最良近似**（best approximation）と呼ぶことにしよう。

定理 15. ある数 α の最良近似は収束子であるか、またはその数を表す連分数の中間分数である。

予備的注意　この命題が例外なく成り立つためには、第 2 節で行ったように階数 -1 の収束子を $p_{-1} = 1$ で $q_{-1} = 0$ として導入しておくことが必要である。たとえば分数 $\frac{1}{3}$ はすぐに確認できるように $\frac{1}{4}$ の最良近似である。しかしながら、これはその数の収束子でも中間分数でもない。なぜなら、これらの分数の集合は（階数 0 から始めるのならば）2 つの数、つまり $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{4}$ だけからなるからである。しかしながら分数 $\frac{1}{0}$ を階数 -1 の収束子とするならば、この集合は

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

からなり、従って分数 $\frac{1}{3}$ を含んでいる。

証明. a/b が数 α の最良近似であると仮定しよう。するとまず最初に $a/b \geq a_0$ である。なぜなら、もし $a/b < a_0$ であれば分数 $a_0/1$（a/b とは異なる分数であり、分母は b より決して大きくない）は a/b よりも α に近い。従って a/b は最良近似でなくなってしまう。

同様にして

$$\frac{a}{b} \leq a_0 + 1$$

であることがわかる。従って $a_0 < (a/b) < a_0 + 1$ であることがわかる。もし $a/b = a_0$ または $a/b = a_0 + 1$ であるならば定理の主張は明らかである。なぜなら、$a_0/1 = p_0/q_0$ は収束子であり、$(a_0 + 1)/1 = (p_0 + p_{-1})/(q_0 + q_{-1})$ は α の中間分数だからである。

もし a/b が α のどんな収束子や中間分数とも一致しないとしよう。すると、それは 2 つのそのような連続した分数の間にある。たとえば、適切に選んだ k と r（$k > 0$ で $0 \leq r < a_{k+1}$ または $k = 0$ で $1 \leq r < a_1$）に対して、それは

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}$$

数）, Uspekhi matematicheskikh nauk, **6**, No. 5(45), 33–42 (1951) に解説されている。Remez が見つけたように Ostrogradskiĭのアルゴリズムはある場合には連分数よりもよい近似を与える。残念なことにこれらのアルゴリズムに関しては、計算の目的のためですら、未だに詳しく研究されていない。(B.G.)

と

$$\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}$$

との間にあるから、

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_kr+p_{k-1}}{q_kr+q_{k-1}}\right|<\left|\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}-\frac{p_kr+p_{k-1}}{q_kr+q_{k-1}}\right|$$
$$=\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\{q_kr+q_{k-1}\}}$$

しかし他方においては

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_kr+p_{k-1}}{q_kr+q_{k-1}}\right|=\frac{m}{b(q_kr+q_{k-1})}$$

は明らかである。ただし、m は正の整数で、従って少なくとも 1 に等しい。結果として

$$\frac{1}{b(q_kr+q_{k-1})}<\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\{q_kr+q_{k-1}\}}$$

であり、従って

$$q_k(r+1)+q_{k-1}<b$$

となる。分母が b よりも小さな分数

$$\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}} \tag{25}$$

は分数

$$\frac{p_kr+p_{k-1}}{q_kr+q_{k-1}} \tag{26}$$

よりも α に近く（なぜなら、一般的にいって、第 3 節の結果からすべての中間分数はその前のものよりも α に近い）、従ってそれはまた a/b よりも α に近い。しかし a/b は (25) と (26) の分数との間にある。これは最良近似の定義に矛盾しているので定理 15 は示された。 □

最良近似の概念の定義、それはこの定理の基礎となったものであるが、それは有理分数 a/b と数 α との間の近さというものを、差 $\alpha-(a/b)$ の（絶対値の）小ささというもので計ったのであった（もちろん最も自然なものであろう）。ところが数論においてはしばしば、$b\alpha-a$ という差を考えることがより重要であったり便利であったりすることがある。これは前のものと比べて b だけ異なっている。従ってこの差（絶対値において）の小ささというものもまた、a/b から α への近さを計っているもので

ある。この変更は一瞥するとくだらないものに見える。ところが、すぐにわかるように、そうではないのである。重要な点は、b は定数ではないということである。それは近似している分数自身に依存している。そしてその分数が変わると変わってしまうのである。

定理 15 で述べた意味での最良近似を**第 1 種最良近似**（best approximation of the first kind）と呼ぶことにしよう。そして、有理分数 a/b（$b > 0$）が数 α の第 2 種最良近似（best approximation of the second kind）であるとは $c/d \neq a/b$ かつ $0 < d \leq b$ であるならば

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

が成立することであると定義しよう。第 2 種最良近似は特性量として $|\alpha - a/b|$ の代わりに $|b\alpha - a|$ を用いることで、第 1 種最良近似と完全に同様に定義される。

第 2 種最良近似が第 1 種最良近似でなければならないということは簡単に示すことができる。なぜなら、もし

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \quad \left(\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b},\ d \leq b\right)$$

であるならば、これらの不等式の最初のものに 3 番目のものを掛けて、

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|$$

を得る。言い換えれば、もし分数 a/b が第 1 種最良近似でなければ第 2 種最良近似にはなり得ない。

逆は正しくない。第 1 種最良近似は第 2 種最良近似でないことがある。たとえば分数 $\frac{1}{3}$ は数 $\frac{1}{5}$ の第 1 種最良近似であることが簡単に示される。しかしながら、次の不等式によって、第 2 種ではない。

$$\left|1 \cdot \frac{1}{5} - 0\right| < \left|3 \cdot \frac{1}{5} - 1\right| \quad (1 < 3)$$

これらの注意と定理 15 からすべての第 2 種最良近似は収束子であるか中間分数であることがわかる。しかしながら——そしてここに第 2 種最良近似を見つけるために連分数の機構が果たす基本的な重要性があるのだが——もっと強い主張をすることができるのである。

定理 16. すべての第 2 種最良近似は収束子である。

証明. 分数 a/b が数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

の第 2 種最良近似であると仮定しよう。またその収束子を p_k/q_k と書く。もし $a/b < a_0$ ならば

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq |b\alpha - a| \quad (1 \leq b)$$

となる、つまり、a/b は第 2 種最良近似にはなり得ない。だから $a/b \geq a_0$ である。しかし、すると分数 a/b は、もしそれがどの収束子とも一致しなければ、2 つの収束子 p_{k-1}/q_{k-1} と p_{k+1}/q_{k+1} の間にあるか、または p_1/q_1 よりも大きい。最初の場合には

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geq \frac{1}{bq_{k-1}}$$

であり

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

だから結果

$$b > q_k \tag{27}$$

である。他方で

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_{k+1}}$$

だから従って

$$|b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}$$

であり

$$|q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$$

だから結果として

$$|q_k\alpha - p_k| \leq |b\alpha - a| \tag{28}$$

である。不等式 (27) と (28) から a/b は第 2 種最良近似ではないことがわかる。

　第 2 の場合（つまり、$a/b > p_1/q_1$ のとき）には

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_1}$$

であるから

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$$

となる。他方では明らかに

$$1 \cdot \alpha - a_0| \leq \frac{1}{a_1}$$

であるから

$$|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0| \quad (1 \leq b)$$

でありこれは再び第 2 種最良近似であることに矛盾しており、定理 16 を示している。 □

定理 15 と 16 の逆を考えよう。定理 15 の逆が成立しないことは $\frac{1}{2}$ を考えれば簡単にわかる。これは、簡単に示すことができるように $a = \frac{4}{5}$ の中間分数であるが、最良近似ではない。なぜなら

$$\left|\frac{4}{5} - \frac{1}{1}\right| < \left|\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right| \quad (1 < 2)$$

だからである。こうした例はほかにもいくらでもあるので、読者は自分自身で確認できる。

ところが、定理 16 についてはほとんど完全といってよい逆が成り立っており、もちろんこれはその価値を大いに高めているのである。

定理 17. 収束子は第 2 種最良近似である。ただし、唯一のばかばかしい例外

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$$

は除く。

予備的注意　$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ の場合には、分数 $p_0/q_0 = a_0/1$ は

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1|1 \cdot \alpha - a_0|$$

であるから第 2 種最良近似ではない。

証明. 次のような数を考えてみよう。

$$|y\alpha - x| \tag{29}$$

ただし、y は $1, 2, \ldots, q_k$ の値をとり、x は任意の整数とする。y_0 を適切な x を選んだあとで (29) が最小の正の値をとるような y を表わすものとする（そのような y が複数あればその中で**最小**の y_0 を取ることにする)。また、x_0 を $|y_0 a - x|$ が最小値となるような x の値を表わすものとする。この値が一意に定まることは簡単に確認できる。なぜなら、もし

$$\left|\alpha - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\alpha - \frac{x_0'}{y_0}\right| \quad (x_0 \neq x_0')$$

であったとするなら

$$\alpha = \frac{x_0 + x_0'}{2y_0}$$

であり、この分数は既約である。なぜなら、もし $x_0 + x_0' = lp$ で $2y_0 = lq$（$l > 1$）であったなら、$l < 2$ に対して

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \quad |q\alpha - p| = 0$$

であって y_0 の定義に矛盾する。また、$l = 2$ のときには $q = y_0$ であり

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|$$

であって、x_0 の定義に矛盾するからである。

有理数 α を連分数に展開すると

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n = x_0 = x_0',$$

$$q_n = 2y_0 = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geq 2$$

となり、結果としてもし $a_n > 2$ であるか、または $a_n = 2$ かつ $n > 1$ であるときには $q_{n-1} < y_0$ である。ところが

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leq \frac{1}{2} \leq |y_0\alpha - x_0|$$

であるから、y_0 の定義に矛盾する。もし $n = 1$ かつ $a_n = 2$ であれば $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ で $y_0 = 1$ であり、これは唯一の例外である。

従って y_0 や x_0 は与えられた条件によって一意に定義される。このことから直接 x_0/y_0 が α の第 2 種最良近似であることが従う。なぜなら、不等式

$$|b\alpha - a| \leq |y_0\alpha - x_0|, \quad \frac{a}{b} \neq \frac{x_0}{y_0}, \ b \leq y_0$$

は明らかに x_0 や y_0 の定義に矛盾するからである。従って定理 16 から、

$$x_0 = p_s, \quad y_0 = q_s \quad (s \leq k)$$

であることがわかる。もし $s = k$ なら定理の証明は完了である。しかし、もし $s < k$ なら

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}, \quad |q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$$

であり $p_s = x_0$ で $q_s = y_0$ であるという定義によって

$$|q_s\alpha - p_s| \leq |q_k\alpha - p_k|$$

となり、結果として

$$\frac{1}{q_{k-1}+q_k} < \frac{1}{q_{k+1}}$$

である。つまり

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1}$$

となるが、これは q_k の作り方の規則によって不可能である。これは定理 17 の証明を完了している。 □

この節で述べた連分数の仕組みが持っている性質は、歴史的には、この仕組みを発見・研究した元々の理由であった。ホイヘンス（Huygens）が歯車を使って太陽系の模型を作り出そうとしたときに、2 つの連結した歯車の比（回転周期の比に等しい）を与える歯の数を決定するという問題に直面した。それは可能な限り対応する惑星の運動周期の比 α に近いものでなくてはならない。同時に、歯の数は、技術的な理由からあまり大きなものにはできない。従ってホイヘンスの問題というのはある与えられた限界を超えない分母と分子を用いて可能な限り与えられた数 α に近い有理数を見つけるというものであった。（α は理論的には無理数かもしれないが、実際的には与えられた場合には非常に巨大な分母と分子を持つ有理分数であると仮定される。）我々はこの問題の解決のために連分数の理論が持っている意味をすでに理解しているのである。

7　近似の程度

前節では差 $|\alpha - (p_k/q_k)|$ が同じような形の差と比較してその小ささを評価するということに興味があった。ここではこの差の絶対的な評価を導こう。明らかに、$|\alpha - (p_k/q_k)|$ の小ささを評価する唯一の方法は q_k の何か減少関数と比較することである。このためには第 1 章の定理 9 から直接次の不等式を得る[3]。

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2} \tag{30}$$

[3] もし $\alpha = p_k/q_k$（このとき q_{k+1} が存在しないから定理 9 は適用できない）なら、不等式 (30) は自明である。

従って問題はこの不等式を強めることができるかどうか、つまり右辺を分母 q_k の別の関数 $f(q_k)$ ですべての $n \geq 1$ に対して不等式

$$f(n) < \frac{1}{n^2}$$

を満たすもので置き換えられるかどうか、ということになる。

もし不等式 (30) をこの形で、すべての k において任意の α に対して成り立つように強めたいというのであれば、この方向で強めるということは不可能だということがすぐにわかる。より正確に言えば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して我々は

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}$$

となるような場合を見つけることができる。これを示すには次のような数を調べるだけでよい。

$$\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)}$$

これに対しては

$$p_1 = 1, \quad q_1 = n, \quad p_3 = n+1, \quad q_3 = n(n+2)$$

であるから、従って

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{q_1^2(1+\frac{2}{n})}$$

である。もしいま n を

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1 - \varepsilon$$

となるように選べば、

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}$$

となるのである。

しかしながら、不等式を強めようとするときに（例外なく）すべての k で任意の α に対して成り立つという要求を弱めるならば、そのときには以下で示すように多くの興味深くしかも重要な命題を得ることができるようになる。

定理 18. もし数 α が $k > 0$ 階の収束子を持つならば、次の 2 つの不等式のうち少なくとも一方は成り立つ。

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2}, \quad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

証明. α は p_{k-1}/q_{k-1} と p_k/q_k の間にあるから、

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

が成立する。（この不等式は $1/q_k^2$ と $1/q_{k-1}^2$ との幾何平均は算術平均よりも小さいということを述べている。等号は $q_k = q_{k-1}$ の場合であり、これは今は対象外である。）だから定理の主張は直ちに得られる。 □

この命題は（ある意味で）逆を持っているので興味深い。

定理 19. 不等式

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

を満たすすべての既約有理分数は数 α の収束子である。

証明. 定理 16 によると、a/b が α の第 2 種最良近似であることを示せば十分である。そこで

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b} \quad \left(d > 0,\ \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\right)$$

であると仮定しよう。すると

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2bd}$$

であり、結果

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2 d} \tag{31}$$

となる。他方において $c/d \neq a/b$ であるから、

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bd}$$

となる。従って不等式 (31) によると

$$\frac{1}{ab} < \frac{b+d}{2b^2 d}$$

であるから $d > b$ である。従って分数 a/b は α の第 2 種最良近似であり定理 19 は証明された。 □

定理 18 をさらに強めると次のようになり、きわめて深い定理である。

定理 20. [4]もし数 α が $k>1$ 階の収束子を持つならば、次の 3 つの不等式のうち少なくとも 1 つが成り立つ。

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_k^2},\quad \left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2},$$
$$\left|\alpha-\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}$$

証明. $k\geq 1$ に対して

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}=\varphi_k,\quad \varphi_k+r_k=\psi_k$$

と定義する。

補題 2. もし $k\geq 2$ であり、$\psi_k\leq\sqrt{5}$ かつ $\psi_{k-1}\leq\sqrt{5}$ であれば

$$\varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

である。

証明.

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}}=\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\varphi_n \tag{32}$$

であり

$$r_n=a_n+\frac{1}{r_{n+1}}$$

だから、

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}}+\frac{1}{r_{n+1}}=\varphi_n+r_n=\psi_n$$

であり、補題の条件から

$$\varphi_k+r_k\leq\sqrt{5},\quad \frac{1}{\varphi_k}+\frac{1}{r_k}\leq\sqrt{5}$$

であるから、結果

$$(\sqrt{5}-\varphi_k)\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\varphi_k}\right)\geq 1$$

であるか、または φ_k は有理数だから

$$5-\sqrt{5}\left(\varphi_k+\frac{1}{\varphi_k}\right)>0$$

[4]ここで与えた証明のある簡略化が I. I. Zhogin の論文 “Variant dokazatel’stva odnoi teoremy iz teoriĭtsepnykh drobei（連分数理論におけるある定理の別証明）”, Uspekhi matematicheskikh nauk, **12**, No. 3, 321–322 (1957) にある。

である。すると、$\varphi_k > 0$ だから、

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k\right)^2 < \frac{1}{4}$$

であり結果として

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k < \frac{1}{2}, \quad \varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

となり、補題が証明される。 □

さて、我々の主張に反して

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \quad (n = k, k-1, k-2)$$

であると仮定しよう。第 1 章の式 (16) によると

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &= \frac{1}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \varphi_{n+1}}\end{aligned}$$

であり、結果として

$$\varphi_{n+1} \leq \sqrt{5} \quad (n = k, k-1, k-2)$$

である。補題によると

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \varphi_{k+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

と結論づけられるから、従って (32) を用いると

$$a_n = \frac{1}{\varphi_k} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$$

であり、これは不可能である。この矛盾は定理 20 を証明している。 □

定理 18 と 20 によれば、明らかにまだまだこのような命題の列を進めていけるような印象がある。ところがその印象は誤りである。次の数

$$\alpha = [1; 1, 1, \ldots]$$

を考えよう。いつものように、$\alpha = 1 + (1/r_1)$ であると仮定する。すると明らかに $r_1 = \alpha$ であるから、

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

となり、結果として

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である。明らかに、任意の n に対して $r_n = \alpha$ だから

$$\alpha = \frac{p_k\alpha + p_{k-1}}{q_k\alpha + q_{k-1}}$$

であり、結果として

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k\alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2\left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

となる。ところが第 1 章の定理 6 から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1; 1, 1, \ldots, 1] \to \alpha \quad (k \to \infty)$$

であるから、

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k \quad (\varepsilon_k \to 0 \text{ as } k \to \infty)$$

となり、従って

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k\right)} = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \varepsilon_k)}$$

である。このことから $c < (1/\sqrt{5})$ がどんな数であろうと、十分に大きな k に対しては

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}$$

であることがわかる。従って定理 20 における定数 $1/\sqrt{5}$ は、任意の α に対して無限に多くの k において対応する不等式が成立することを願うなら、これ以上小さな定数には置き換えることができない。どんなに小さな定数に対してもある数 α（つまり、$\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$）であって有限個の k を除いては不等式が成り立たないようなものが存在するのである。だから定理 18 と 20 で始まるような命題の連鎖というのは後のもの以降は成り立たなくなってしまい、これ以上は続けることができない。

8　一般近似定理

　今までは主として収束子による近似という問題に興味があり、これに関する多くの基本的な問題を解決してきた。すでに収束子が最良近似であるということをみてきた

から、今までに得られた結果によると、おおよそいつも有理数で無理数を近似する法則というものの研究をいかなる特定の数を表現する機構にも依らずに進めていけると仮定してよいだろう。そこで我々はこのような問題を考えよう。ところが、もちろん、どんな種類のものであれ対応するような理論の基礎を完全に解説するというのは（このような基礎的小冊子の中では）不可能である。それは、部分的には紙面が足りないということでもあるが、主にはそのような解説というのは我々の問題には非直接的な関係しか持っていないからである。そこで、多くの基礎的な命題を紹介するに止めることにするが、それらは無理数の数論的性質の研究へ連分数を応用する方法を描き出してくれる。

前節までの結果から自然にわき上がる最初の問題といえば次のようなものになる。どのような定数 c に対して、任意の α に対する不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

が無限に整数解 p, q（$q > 0$）を持つだろうか。前節の最後の結果によると次の定理を得る。

定理 21. 任意の α に対して、$c \geq (1/\sqrt{5})$ のとき不等式 (33) は無限に多くの整数解 p, q（$q > 0$）を持つ。しかしながらもし $c < (1/\sqrt{5})$ であれば、適当な α に対しては (33) は有限個の解しか持たない。

証明. この最初の主張は定理 20 の直接の帰結である。（α が有理数 a/b で、従って有限個の収束子しか存在しないときには定理 21 の最初の主張は $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $q = nb$ かつ $p = na$ とおいて自明に証明される。）そこで $c < (1/\sqrt{5})$ と仮定しよう。第 7 節でやったように

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, \ldots]$$

と置こう。2 つの整数 p と q（$q > 0$）が不等式 (33) を満たすならば、定理 19 によると p/q は数 α の収束してある。しかし第 7 節の最後で見たように、$c < (1/\sqrt{5})$ という仮定の下ではこれらの収束子の有限個しか不等式 (33) を満たさない。これは主張を証明している。 □

従って一般に（つまり、すべての可能な実数 α を考えるならば）近似の程度が $q/(\sqrt{5}q^2)$ で特徴づけられるということは改良できない。（「近似の程度」という用語は、誤差の大きさに対する適切な評価が常に見つけられるという意味で用いられている。[5]）こ

[5]（英語版）翻訳者の注意。

れはより高階の近似が可能な無理数が一つも存在しないという意味ではない。反対であってこの方向への可能性というものには際限がない――連分数の仕組みによって最も簡単に示される事実である。

定理 22. どんな自然数の正値関数 $\varphi(q)$ に対しても、不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$$

が無限に多くの整数解 p, q（$q > 0$）を持つような無理数 α が存在する。

証明. 次のような不等式

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2 \varphi(q_k)}$$

を満たすような要素を持つ無限連分数 α を作ろう。これにはもちろん、いくらでも方法がある。ここで a_0 を任意に選ぶ。すると任意の $k \geq 0$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1}q_k^2} < \varphi(q_k)$$

となるから証明が終わっている。 □

最も一般的な場合では、不等式

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

あるいは同値であるが

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^2 a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}}$$

であるということから

$$\frac{1}{q_k(a_{k+1} + 2)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} \tag{34}$$

となるということに注意する。そして、これによれば、与えられた $a_0, a_1, \ldots, a_k$ に対して、それに続く a_{k+1} がより大きければ大きいほど、p_k/q_k は α をより近く近似するということが明らかである。そして近似子はいかなる場合であっても最良近似なのだから、大きな数を要素として含むような無理数ほど有理分数でよく近似できるという結論を得る。この量に関する注意は不等式 (34) によって定量的に表わされてい

る。特に有界な要素を持つ無理数は最悪にしか近似できない。従って、今まで固定した程度よりも高い近似を持たない無理数を例示しようとしたときに、数

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, \ldots]$$

を何故何度も繰り返して持ち出したかということが明快になった。すべての無理数の中で、この数は明らかに可能な中で最も小さな要素しか持っていない。（a_0 は除く。これは何の役割も果たさないから。）だから有理数で最も近似されない数だったのである。

有界な要素しか持っていない数に特有の近似性は次の命題で完全に言い表される。そしてこれは、すでに述べたように、ほとんど明らかなことである。

定理 23. 有界な要素を持つ任意の無理数 α と十分に小さな c に対して、不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$$

は整数解 p, q（$q > 0$）を持たない。他方で、非有界な要素の列を持つ数 α に対しては、任意の $c > 0$ に対して (33) は無限にそのような解を持つ。

言い換えれば有界な要素を持つ無理数は決して $1/q^2$ よりも高い近似を持たないが、非有界な要素を持つ無理数はより高階の近似を持つ。

証明. 連分数 α の要素の集合が上から有界ではないとすると、任意の正の c に対して、整数 k で

$$a_{k+1} > \frac{1}{c}$$

となるものが無限に存在する。だから不等式 (34) の 2 番目によると

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c}{q_k^2}$$

となる k は無限に存在するから定理の 2 番目の主張は証明された。もしある $M > 0$ が存在して

$$a_k < M \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

となるのであれば (34) の最初の方から、任意の $k \geq 0$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)}$$

である。

そこで、p と q を任意の整数（$q > 0$）としよう。そして k を不等式

$$q_{k-1} < q \leq q_k$$

によって定めよう。するとすべての収束子は第 1 種最良近似であったから

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} = \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q}{q_k}\right)^2 \\ &> \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^2 = \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 \\ &> \frac{1}{q^2(M+2)}\frac{1}{(a_k+1)^2} > \frac{1}{(M+2)(M+1)^2 q^2}\end{aligned}$$

となる。だから

$$c < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2}$$

と選べば、不等式 (33) はどんな整数 p と q（$q > 0$）に対しても成立しない。これは定理の第 1 の主張を示している。 □

ここまでは常に、近似の近さという量を差 $\alpha - (p/q)$ の小ささによって評価してきた。しかし、すべての定理に適切な修正を加えて、代わりに（第 6 節のように）差 $q\alpha - p$ を考えてきたといってもよいかもしれない。この単純な観察から直ちに、我々の考えている問題について、新しく、またきわめて重大な様子が明らかになる。

2 つの未知数 x, y に関する最も単純な斉次線形方程式、つまり

$$\alpha x - y = 0 \tag{35}$$

において、α は与えられた無理数とするとき、明らかにこれを整数の中で解くことはできない（いうまでもなく、$x = y = 0$ という自明な場合は除く）。しかしながら、これの近似解を求めるという問題を提案できる。つまり、整数 x と y を差 $\alpha x - y$ が十分に（つまり、指定された量よりも）小さくなるように選べという問題である。明らかにこの節で今まで述べた定理は、この方程式 (35) の近似解がもつ法則を述べていると解釈することができる。従って、たとえば定理 21 によれば、$1/\sqrt{5}$ 以上のどんな正の C に対しても

$$|\alpha x - y| < \frac{C}{x} \tag{36}$$

となるような整数 x と y（$y > 0$）の組が無限に存在することがわかる。このやり方で斉次方程式 (35) から非斉次方程式

$$\alpha x - y = \beta \tag{37}$$

（ここで β は与えられた実数）へと移り、その整数解 x と y の存在やその近似解の性質を調べよう（言い換えれば、適切に選んだ整数 x と y によって可能な限り差 $\alpha x - y - \beta$ を小さくしようとすることに関連した原理を調べる）というのは自然である。この問題はロシアの偉大な数学者チェビシェフ（P. L. Chebyshev）によって最初に提出され、彼はこれに関する最初の基本的な結果を得た。そして特にソビエトの数論学派によって徹底的に研究されてきている。

非斉次の場合に斉次の場合と基本的な違いが現れている点は、任意の β に対して x と y をうまく選んで量 $|\alpha x - y - \beta|$ をいくらでも小さくできるのは α が無理数のときに限るということである（もし斉次の場合であれば量 $|\alpha x - y|$ は**任意の** α に対していくらでも小さくできる）。実際、もし $b > 0$ と a を整数として $\alpha = a/b$ とおくとき、$\beta = 1/2b$ とおけば任意の整数 x, y に対して

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{2(ax - by) - 1}{2b} \right| \geq \frac{1}{2b}$$

となる。なぜなら $|2(ax - by) - 1|$ は奇数であり、少なくとも 1 に等しいからである。

従って今後は α は無理数であると仮定しよう。この理解の下でいよいよ $|\alpha x - y - \beta|$ を任意に小さくすることができるというだけでなく、斉次の場合についてもずいぶん深く拡張できるということを示そう。

定理 24（チェビシェフ）. 任意の無理数 α と任意の実数 β に対して不等式 $|\alpha x - y - \beta| < 3/x$ は無限に多くの整数解 x と y（$x > 0$）を持つ[6]。

予備的注意　明らかにこの結果は定理 21 で述べた斉次方程式で対応する問題の完全な類似である。その違いはここでは $1/\sqrt{5}$ の代わりに 3 だということだけである。近似の程度は以前と同じである。また、3 という数は最良のものではなく、定理 24 が成立する最も小さな数の正確な値は 3 よりもかなり小さいだろうということを注意しておこう。

証明. p/q を α の任意の収束子とする。すると

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \quad (0 < |\delta| < 1) \tag{38}$$

となる。また、任意の実数 β に対してある整数 t で

$$|q\beta - t| \leq \frac{1}{2}$$

[6] ある意味でこれより強い定理の単純な証明がヒンチンの論文 “Printsip Dirikhle v teorii diofantovykh priblizhenií（ディオファントス近似の理論におけるディリクレ原理）”, Uspekhi matematicheskikh nauk, **3**, No. 3, 17–18 (1948) にある。より詳細化はヒンチンの論文 “O zadache Chebysheva（チェビシェフの問題について）”, Izvestiya akad. nauk SSSR, ser. matem., **10**, 281–294 (1946) にある（B.G.）

となるものが存在するから、

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \quad (|\delta'| \leq 1) \tag{39}$$

が成立する。

p と q は公約数として ± 1 以外を持たないから、整数 x と y の組で

$$\frac{q}{2} \leq x < \frac{3q}{2}, \quad px - qy = t$$

となるものが存在する。なぜならば、もし r/s が p/q のほんの直前の収束子であるならば、

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \quad q(\varepsilon rt) - p(\varepsilon st) = t\varepsilon^2 = t$$

であり、任意の整数 k に対して

$$p\,(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t$$

であるが、k は

$$\frac{q}{2} \leq x = kq - \varepsilon st < \frac{3q}{2}$$

を満たすように選ぶことができるからである。すると、式 (38) と (39) によって

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q} \right| = \left| \frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q} \right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q}$$

であり、

$$q > \frac{2}{3}x$$

だから、

$$\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x}$$

である。最後に、q は任意に大きくとれ、$x \geq 1/2$ だから x はいくらでも大きくとれる。これは定理を示している。 $\square$

しかし、方程式 (37) の整数の近似解を求めるという問題は、今とは異なる、またある意味でより自然なものにすることができる。この問題の難点は可能な限り大きな整数値の x と y によって $|\alpha x - y - \beta|$ を可能な限り小さくするということにあったのだから、問題を次のように定式化することは自然である。我々がすでに（定理 24 から）分かっているように、どんな正の数 n（いかに大きくとも）、どんな無理数 α、そしてどんな実数 β に対しても、ある整数 $x > 0$ と y を不等式

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n} \tag{40}$$

を満たすように見つけることができる。しかしながら、定理 24 は、量 $1/n$ で特徴づけられるような要求された精度を極限において達成するような数を見つけるための情報を一般には与えてくれない。これは、もしある数 N で、n には依存するが α や β には依存しないものが存在し、(40) が付加的条件

$$|x| \leq N$$

の下でいつも満たされるようにできれば達成できるかもしれない。

この問題の新しい定式化は明らかに元々のものとは全く異なる。以前においては（定理 24 のように）近似の精度というのは x の値によって決定されていたものであったが、今やあらかじめ誤差を決めてしまっておきたいのだし、この誤差を達成するために x をどれほど大きく取ればよいかを理解したいと思っているのである。この違いのために、この問題に対する解答はかなり手直しした形式で与えられる。とりわけ、斉次の場合と非斉次の場合とで全く異なる結果が導かれるのである。

斉次方程式（$\beta = 0$）の場合には、この問題は大変簡単な解を持つ。

定理 25. すべての実数 $n \geq 1$ と α に対して、次の不等式を満たす整数 x と y が存在する。

$$0 < x \leq n, \quad |\alpha x - y| < \frac{1}{n}$$

証明. もし α が有理数 q/b で $0 < b < n$ となっているものであれば結論は $x = b$ で $y = a$ として直ちに得られる。もし α が無理数であるが、n を越える分母を持っているならば、k を

$$q_k \leq n < q_{k+1}$$

によって定める（ただし p_k/q_k は α の k 階収束子である）と

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n}$$

だから

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leq n$$

であり定理を示している。 □

さて次の自然な質問は非斉次の方程式 (37) の場合であっても同じ程度の近似が可能であるかということである。言い換えれば、どんな有理数 α に対しても、ある正の整数 C が存在して、

$$0 < x \leq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}$$

が任意の $n \geq 1$ と β に対して成り立つような整数 x と y が存在するか。（斉次の場合には $C=1$ が絶対的な定数であって、今は C は α に依存してよいと言っているのだから、明らかにより弱いことしか尋ねていない。）ところが、このような仮説が可能ということに反する議論を行うことは易しい。まず最初に、有理数 α に対しては明らかに成立していない。なぜなら、すでに知っているように量 $|\alpha x - y - \beta|$ は一般（つまり任意の β）には任意には小さくすることができないからである。このから、もし α が無理数（しかし有理数できわめてよく近似できる）なら、量 $|\alpha x - y - \beta|$ は（定理 24 によって）いくらでも小さくすることができるにも関わらず、適切に選んだ β に対してはかなり大きな x と y が必要だと思われる。これらのことを考え合わせると、α が有理数で近似しづらければしづらい（つまり $\alpha x - y$ を零に近づけることが難しければ難しい）ほど $\alpha x - y$ を任意の実数 β に近づけやすいのではないかと考えられる。すでに分かっているように、これは結局 α の要素があまり速く大きくならないということである。こうした予備的考察は次のようにまとめられる。

定理 26. 任意の実数 $n \geq 1$ と β に対して、2 つの整数 x, y（$x > 0$）が存在して

$$x \leq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}$$

を満たすような正の数 C が存在する必要十分条件は無理数 α が有界な要素による連分数で表現されることである。

証明. $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ で $a_i < M$（$i = 1, 2, \ldots$）であり、$m \geq 1$ かつ β は任意の実数であると仮定しよう。α の収束子を p_k/q_k と書くことにすると添え字 k を

$$q_k \leq m < q_{k+1}$$

によって決めることができる。すると

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{m q_k}$$

であるかまたは

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{m q_k} \quad (|\delta| \leq 1) \tag{41}$$

が成立する。そこで整数 t を

$$|\beta q_k - t| \leq \frac{1}{2}$$

を満たすように選ぶと

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2 q_k} \quad (|\delta'| \leq 1) \tag{42}$$

となる。最後に定理 24 の証明でやったように整数 x と y の組を

$$xp_k - yq_K = t, \quad 0 < x \le q_K \tag{43}$$

を満たすように見つけてくる。すると (41)、(42)、及び (43) から

$$\begin{aligned}
|\alpha x - y - \beta| &= \left|\frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| = \left|\frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| \\
&< \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \le \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}}\left(\frac{q_{k+1}}{q_k}\right) \\
&< \frac{1}{m} + \frac{1}{2m}(a_{k+1}+1) < \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}
\end{aligned}$$

ここまでは $m \ge 1$ は完全に任意であった。そこで、今与えられた $n \ge 1$ に対して $m = \frac{1}{2}(M+3)$ と選べば明らかに $m > 1$ である。結果として上で述べたことから x と y を指定されたように選べば

$$0 < x \le q_k \le m = \frac{M+3}{2}n$$
$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}$$

であり、定理の最初の部分は示された。

第 2 の部分を示すには、数 α の要素 a_k の集合が上から有界であると仮定しよう。今の場合に定理 23 を適用すると、どんな正の数 ε に対してもある整数 $q > 0$ と p があって、不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2}$$

を満たすようにできるから、

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta\varepsilon^2}{q^2} \quad (|\delta| < 1)$$

である。そこで $n = q/\varepsilon$ かつ $\beta = 1/2q$ とおこう。すると、任意の整数 x と y（$0 < x \le Cn$）に対して

$$\begin{aligned}
|\alpha x - y - \beta| &= \left|\frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| = \left|\frac{2(xp-yq)-1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| \\
&> \frac{2(xp-yq)-1}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \ge \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} = \frac{1-2C\varepsilon}{2q} = \frac{1-2C\varepsilon}{2\varepsilon}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

が成立する。ところがどれほど C が大きくても、十分に小さな ε に対しては $[(1-2C\varepsilon)/2\varepsilon] > 1$ であり、結果として任意の x と y（$0 < x \le Cn$）に対して

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n}$$

となるから第 2 の部分を示している。 □

今得たばかりの結果について再検討しておこう。整数の中で (37) の近似解を調べるときには、「通常（normal）」の場合として、C が（α には依存してもよい）定数のときに誤差 $1/n$ がある $x < Cn$ によって任意の $n \geq 1$ に対して達成できるようなものを調べる必要がある。斉次方程式（$\beta = 0$ としたもの）は常に通常解を持っている（定理 25）。定理 26 によると、一般の（非斉次の）方程式が正規解を持つのは対応する斉次方程式が異常（supernormal）（つまり斉次方程式が任意の $\varepsilon > 0$ と適切に選んだ n によって、誤差 $1/n$ で $x < \varepsilon n$ となる整数 $x > 0$ と y によって満たされている）解をもたないとき、またそのときに限る。この観点によれば、我々の結果は、線形（代数的、積分、など）方程式の解に関する一般的な法則の亜種と見なすことができるのである。すなわち、**一般の場合においては、対応する斉次方程式が「異常な」解を持たないときに、非斉次方程式は「正常に」解ける。**

また定理 26 において C は β に依存しないと要請していることにもまた注意をしておく。C が β の関数である場合にも同じ結果が得られるであろうが、（第 2 の部分の）証明は幾分複雑なものになる。

9　代数的無理数の近似とリュービルの超越数

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{44}$$

を**整数**係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ の n 次の多項式とする。このとき、この多項式の根 α は**代数的**であるという。すべての有理数 $\alpha = a/b$ は 1 次方程式 $bx - a = 0$ の根であるから代数的数の概念は明らかに有理数の自然な拡張である。もしある代数的数が n 次の方程式 $f(x) = 0$ を満たし、それより小さな次数のどんな（整数係数の）方程式も満たさないときには n 次の代数的数と呼ばれる。特に有理数は 1 次の代数的数として定義できる。多項式 $x^2 - 2$ の根である数 $\sqrt{2}$ は 2 次の代数的数であり、2 次の無理数と呼ぶ。3 次、4 次、そして高次の無理数も同様に定義される。代数的でない数はすべて**超越的**（transcendental）であるという。超越数の例は e と π である。現代整数論における代数的数の偉大な役割のために、それらの有理分数近似に関する性質の問題へ多くの特別な研究が行われてきている。この方向への最初の特筆すべき結果は次の定理であり、リュービル（Liouville）の定理として知られている。

定理 27. すべての n 次実無理代数的数 α に対してある正の数 C が存在し、任意の整

数 p と q（$q > 0$）に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$$

が成立する。

証明. α を多項式 (44) の根であると仮定する。すると代数学によって

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x) \tag{45}$$

と書くことができる。ただし $f_1(x)$ は $n-1$ 次の多項式である。ここで $f_1(\alpha) \neq 0$ である。これを示すには、$f_1(\alpha) = 0$ と仮定する。すると $f_1(x)$ は（余りなく）$x - \alpha$ で割れる。従って $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割れる。ところが、そうであれば $f'(x)$ は $x - \alpha$ で割れる。つまり、$f'(\alpha) = 0$ である。ところが、$f'(x)$ は整数係数の多項式であり、α が n 次の代数的数であるから、これは不可能である。従って $f_1(\alpha) \neq 0$ であり、従ってある正の数 δ で

$$f_1(x) \neq 0 \quad (\alpha - \delta \leq x \leq \alpha + \delta)$$

となるものを見つけることができる。

p と q（$q > 0$）を任意の整数の組とする。もし $|\alpha - (p/q) \leq \delta$ であれば $f_1(p/q) \neq 0$ であり、$x = p/q$ を式 (45) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} - \alpha = \frac{f(\frac{p}{q})}{f_1(\frac{p}{q})} &= \frac{a_0 + a_1(\frac{p}{q}) + \cdots + a_n(\frac{p}{q})^n}{f_1(\frac{p}{q})} \\ &= \frac{a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n}{q^n f_1(\frac{p}{q})}\end{aligned}$$

を得る。

この分数の分子は整数である。さらに零でもない。なぜなら、もしそうであれば $\alpha = p/q$ となってしまうが α は仮定から無理数である。従ってこの分子は絶対値が 1 以上である。区間 $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ における関数 $f_1(x)$ の最小上界を M と書く。すると最後の不等式によって

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{Mq^n}$$

である。

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta$$

となっている場合には

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\delta}{q^n}$$

となっているから、もしいま C を δ と $1/M$ より小さな任意の正の数とすれば、どの場合であれ（つまり任意の $q>0$ と p に対して）

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$$

であり、定理 27 の証明が完了である。 □

リュービルの定理から分かることは、代数的数はある誤差（これは基本的には問題における代数的数の次数に依存する）の程度以上に有理分数で近似することができない。この定理の主な歴史的重要性は、超越数の存在証明を可能とした事実にあり、そのような数を具体的に示すことが可能になったということである。実際に示すには、すでに分かったように、有理分数がきわめて近い近似を与える無理数を示せば十分であり、定理 22 によればこれは際限なく可能である。

とりわけ定理 27 によれば、もし任意の $C>0$ と任意の自然数 n に対してある整数 p と q（$q>0$）があって

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^n} \tag{46}$$

となるならば α は超越的である。連分数の仕組みを使えば欲しいだけ多くいくらでもそのような数を作ることができる。必要なことはただ要素 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ を選び、収束子 p_k/q_k を作って

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}$$

を取ればよい。すると

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}}$$

である。上の結果によると、どんな $C>0$ と自然数 n が取られていたとしても k を大きく取れば、不等式 (46) は明らかに満たされている。

10　2 次無理数と周期的連分数

定理 27 によれば、どんな 2 次無理数 α に対してもその α に依存するある正の数 C が存在して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

は整数解 p と q（$q>0$）を持たない。このことと定理 23 によれば、すべての 2 次無理数の要素は有界である。しかしながら、リュービルよりもずいぶん前にラグランジュ

（Lagrange）はこれらの無理数を表わす連分数が持つもっと大変に深い性質を発見していた（それらをより深く特徴づけるものである）。2 次無理数の要素の列は常に周期的であり、逆に周期的連分数はある 2 次連分数を表わしているということがわかる。この節はその主張の証明にあてられる。

連分数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

が**周期的**（periodic）であるとは、ある正の整数 k_0 と h が存在して、任意の $k \geq k_0$ に対して

$$a_{k+h} = a_k$$

が成立することであると約束しよう。10 進小数の場合と同様にして、このような連分数を

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}] \tag{47}$$

と書き表すことにする。

定理 28. すべての周期的な連分数は 2 次無理数を表わしており、すべての 2 次無理数は周期的な連分数で表わされる。

証明. 最初の主張は数語で証明できる。明らかに周期的連分数 (47) の剰余は関係

$$r_{k+h} = r_k \quad (k \geq k_0)$$

を満たす。従って第 1 章の式 (16) によって $k \geq k_0$ に対して

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}} \tag{48}$$

であるから

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}$$

が成立する。従って、r_k は整数係数の 2 次方程式を満たし、結果 2 次無理数である。しかしこの場合には (48) の最初の等式から α もまた 2 次無理数である。

逆は幾分複雑である。α が整数係数の 2 次方程式

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{49}$$

を満たすと仮定しよう。α を n 階の剰余を用いて書き表すと

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

となる（再び第 1 章の (16) を用いた）から、r_n は方程式

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0 \tag{50}$$

を満たすことがわかる。ただし整数 A_n, B_n, C_n は

$$\left.\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

によって定義されており、従って特に

$$C_n = A_{n-1} \tag{52}$$

であることがわかる。

　これらの式を用いると、簡単に

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac \tag{53}$$

であることが直接確かめられ、従って (50) の判別式は n によらずに (49) の判別式に等しい。さらに

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}$$

であるから

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \quad (|\delta_{n-1} < 1)$$

がわかり、従って式 (51) から

$$\begin{aligned} A_n = a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ = (a\alpha^2 + b\alpha + c)q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-2}^2} + b\delta_{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かるから、(49) によって

$$|A_n| = \left|2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

となり、(52) から

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

であることが分かる。従って (50) に現れる係数 A_n と C_n は絶対値において有界であり、従って n が変わるときにただ有限種類の異なる値しかとらないと仮定してよい。すると、(53) から B_n は有限個の異なる値しかとることができない。従って、n が 1 から ∞ まで増大するとき、有限種類の (50) しか現れてこない。しかしいずれの場合においても、r_n はただ有限個の異なる値しか取ることができないから、従ってうまく k と h を選べば

$$r_k = r_{k+h}$$

をなる。これから α を表わす連分数は周期的であることが分かり、定理の第 2 の部分を示している。 □

より高次の代数的無理数を表わす連分数に関しては、いかなる類似の証明も知られていない。一般的には、有理分数による高次の代数的数の近似に関しては、リュービルの定理や、それを強めて得られる新しい命題の系としてのみ知られているだけである。また、2 より高い次数の代数的数で連分数展開が知られているようなものは、現在ではまだ存在しないということを注意しておくのも興味深い。たとえば、それらの展開した要素の集合が有界であるか非有界であるかも分かっていないのである。一般に 2 よりも高い次数の連分数展開に関する問題はきわめて難しく、ほとんど研究されていない。

第3章　連分数の測度論

11　導入

前の章で、実数というのはその数論的性質においては全く異なるものになりうるということを理解した。実数を有理数と無理数へ、または代数的数と超越数へというような基本的な分割に加えて、それらの数論的性質（最も重要なものとしては、それらの数が有理分数によってどれくらい近似されるかという条件）を決めている条件に従って、それよりずいぶん細かく分割する方法があった。それらにおいては、今までのところは、ある種の数論的性質を持つ数が実際に存在するというような単純な証明に甘んじてきた。従って、我々は p/q という形の有理分数で近似誤差が $1/q^2$ を越えないような数（たとえばすべての 2 次無理数）が存在することを知っているし、そうではなくて（第 2 章の定理 22）もっと高い次数の近似が許されるような数が存在するということもまた知っている。そこで次のような質問が自然に出てくる。これら 2 つの相反する性質のどちらをより「一般に」考えるべきであろうか。つまり、実数の中で「より出会う」のはこの 2 つの性質のうちどちらであろうか。

今提出された問題をより正確に定式化したければ、我々が実数に関するある性質やその他のもの（たとえば、無理性、超越性、要素の有界列を持っているか、など）を述べようとする都度、実数をその性質によって分割した集合を記憶しておかなければならない。つまり、(1) その性質を持つ数の集合と (2) それを持たない数の集合である。そして、問題は明らかにこれら 2 つの集合を、どちらの集合がより多くの数を含んでいるかを決定するという目的で、比較研究するという問題に帰着される。しかしながら実数の集合を比較するには、数多くの観点もあるし、数多くの特性量も考えられる。そこでそれらの濃度、または測度、あるいは他の測り方による量などで定式化することができる。それらの方法や結果を考えると、その元の性質によって定められる数の集合の**測度**を調べることが最も興味深いということが実証されてきている。この研究、**連続体の測度論的数論**（measure arithmetic of the continuum）と呼ぶものであるが、これは最近かなりの発展を遂げてきており、多くの単純かつ興味深い原理を導き出している。無理数の数論的性質を調べようとすると、連分数の仕組みは最も自然であり、また最も効果的に働く道具である。しかしながら、これを測度論的数論

のための道具にしようとする（つまり、これをある数論的性質によって定義された元の集合の**測度**の研究に応用しようとする）と、まず最初にこの仕組みそのものを詳細に解析しなければならない。言い換えれば、あらかじめ定められた性質を持つ連分数展開をもつ数の測度を決定する方法を学ぶ必要がある。この種の問題は大変な変化に富む。たとえば、$a_4 = 2$ となる数、または q_{10} が 1000 未満となる数、または要素が有界列となる数、または偶数の要素を持たない数、などの数の集合の測度を測るように求められるかもしれない。このような問題を解くために使われる方法が**連分数の測度論**（measure theory of continued fractions）である。この章はではその理論の基礎や基本的な応用について述べる。

与えられた実数に何か整数を加えてもその基本的な性質は変わらないから、ここからは 0 と 1 の間にある実数を調べることに限定しよう。つまりいつも $a_0 = 0$ と仮定するのである。このようにある区間に数を制限することは、もし集合の測度が一般に無限大になってほしくないのなら、測度論においては必要なことである。読者は基本的な測度論について慣れているものと仮定している[1]。

12　表現される数の関数としての要素

任意の実数は連分数への**一意的展開**を持つ。

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

それぞれの要素 a_n は数 α によって一意的に決まっている。つまり、それは α の一価関数

$$a_n = a_n(\alpha)$$

である。連分数の測度論を展開するためにはまず最初にこの関数の性質を研究し、その振る舞いについて一般的な様子を知らなければならない。この節ではこの問題を考える。

すでに 11 節で注意したように、我々は $a_0 = 0$ と仮定する。記法を簡単にするために

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

の代わりに

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$$

[1] この章の内容を理解するためには、実変数関数に関するどんな教科書でも載っている程度の事項で十分すぎる。

と書くことにしよう。つまり、

$$[a_1, a_2, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

ということである。

α の関数として最初の要素 a_1 を考えることから始めよう。

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}$$

であるから、$a_1 = [1/\alpha]$ は明らかである。つまり a_1 は $1/\alpha$ を越えない最大の整数である。従って

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \quad 1 \le \frac{1}{\alpha} < 2 \text{ つまり } \frac{1}{2} < \alpha \le 1 \text{ のとき}\\
a_1 &= 2, \quad 2 \le \frac{1}{\alpha} < 3 \text{ つまり } \frac{1}{3} < \alpha \le \frac{1}{2} \text{のとき}\\
a_1 &= 3, \quad 3 \le \frac{1}{\alpha} < 4 \text{ つまり } \frac{1}{4} < \alpha \le \frac{1}{3} \text{のとき、などなど}
\end{aligned}$$

であり、一般に

$$a_1 = k, \quad k \le \frac{1}{\alpha} < k+1 \text{ つまり } \frac{1}{k+1} < \alpha \le \frac{1}{k} \text{のとき}$$

である。だから関数 $a_1 = a_1(\alpha)$ は $1/\alpha$ が整数となる α で不連続であり、α が 0 に近づくに従って限りなく増大する。図 3.1 はその絵による表現である。a_1 は区間

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \le \frac{1}{k}$$

において定数であることに注意しておく。これらの区間のことを**第 1 階の区間**（intervals of the first rank）と呼ぶ。また

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\, d\alpha = +\infty$$

であることにも注意しておく。なぜなら、この積分は明らかに次の発散する級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

に等しいからである。

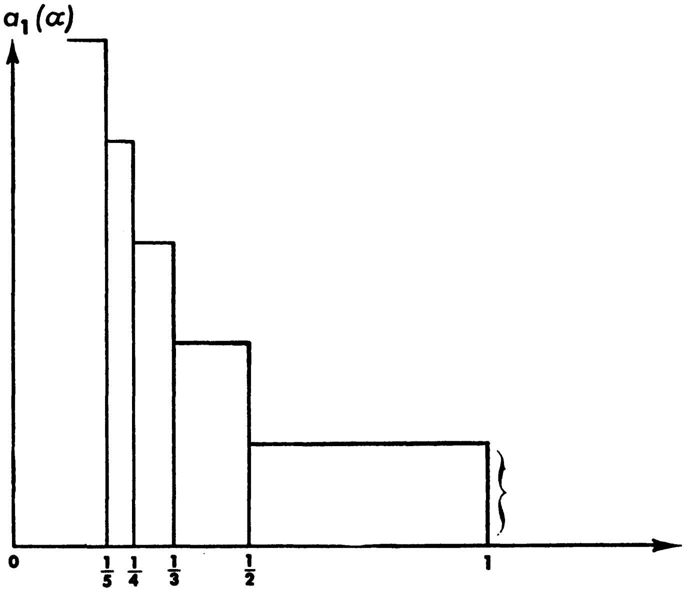

図 3.1:

さて、関数 $a_2(\alpha)$ を調べよう。まずある 1 階の区間

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}$$

において考えることにする。この区間においてはすべての点で $a_1 = k$ であり、従って

$$\alpha = \frac{1}{k + \frac{1}{r_2}}$$

である。ただし $1 \leq r_2 < \infty$ であり $a_2 = [r_2]$ である。r_2 が 1 から ∞ へと増大するとき、α は $1/(k+1)$ から $1/k$ へ増大する。従って 1 階の区間の中ですべての値をとる。そして明らかに

$$a_2 = 1, \quad 1 \leq r_2 < 2 \text{ つまり } \frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \text{ のとき}$$
$$a_2 = 2, \quad 2 \leq r_2 < 3 \text{ つまり } \frac{1}{k+\frac{1}{2}} < \alpha \leq \frac{1}{k+\frac{1}{3}} \text{ のとき}$$
$$a_2 = 3, \quad 3 \leq r_2 < 4 \text{ つまり } \frac{1}{k+\frac{1}{3}} < \alpha \leq \frac{1}{k+\frac{1}{4}} \text{ のとき}$$

であり、一般に

$$a_2 = l, \quad l \leq r_2 < l+1 \text{ つまり } \frac{1}{k+\frac{1}{l}} < \alpha \leq \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}} \text{のとき}$$

となっている。従ってこの固定した 1 階の区間における $a_2(\alpha)$ の図は図 3.2 のような形になっている。

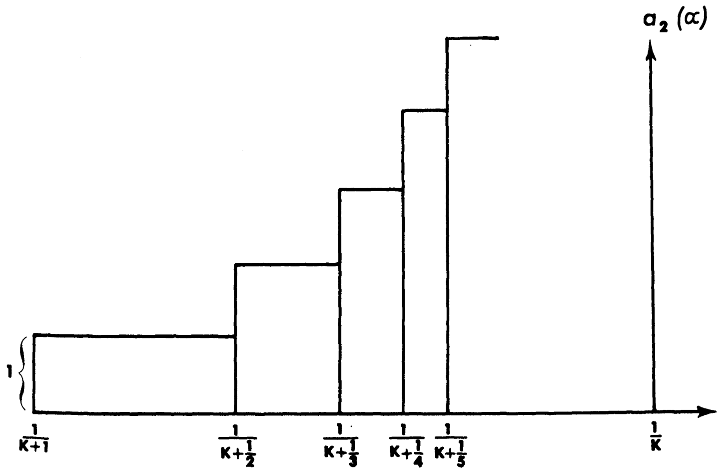

図 3.2:

関数 $a_2(\alpha)$ は各区間

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}}, \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right)$$

において定数であり、これを第 2 階の区間と呼ぶことにする。結果としてすべての第 1 階の区間は左から右へ進む第 2 階の区間の可算集合へと分割される。（第 1 階の区間は右から左への列であったことを思い出しておく。）$a_1 = k$ となる点の集合は第 1 階の区間である。$a_2 = l$ となる点の集合は第 2 階の区間（それぞれが第 1 階の区間の中にある）の可算集合である。それぞれの第 1 階の区間は $a_1 = k$ という条件によって定義でき、第 2 階の区間は $a_1 = k, a_2 = l$ という形の条件によって定義される。

さて、すべての第 n 階の区間が定義できており、関数の集合 $a_1(\alpha), a_2(\alpha), \ldots, a_n(\alpha)$ を調べていると仮定しよう。値

$$a_1 = k_1,\ a_2 = k_2,\ \ldots,\ a_n = k_n \tag{54}$$

によってある階数 n の区間 J_n が定義される。J_n における関数 $a_{n+1}(\alpha)$ の振る舞いを調べるために、この区間における任意の数 α は

$$\alpha = [k_1, k_2, \ldots, r_n, r_{n+1}] \tag{55}$$

という形で表現されているということを注意する。ただし r_{n+1} は 1 から ∞ までのすべての可能な値をとる。逆に任意の r_{n+1}（$1 < r_{n+1} < \infty$）に対して式 (55) は条件 (54) を満たす数 α を定め、結果としてそれは区間 J_n に含まれる。$a_{n+1} = [r_{n+1}]$ であるから、それぞれの第 n 階の区間において関数 $a_{n+1}(\alpha)$ は 1 から ∞ までのすべての整数値を取ることが分かる。より正確な絵を描くには、α の収束子をいつものように p_k/q_k で表わすことにしよう。すると

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

であり、α が区間 J_n 全体を動くときに r_{n+1} は 1 から ∞ まで増大する。ところが $p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1}$ は、数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で完全に決まっており、それらは区間 J_n のすべての点で同じ値を持っているから、定数である。特に $r_{n+1} = 1$ とおいてから $r_{n+1} \to \infty$ とすれば区間 J_n の端点として

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \quad と \quad \frac{p_n}{q_n}$$

が得られる。また

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})}$$

であるから、α は区間 $(1, \infty)$ における r_{n+1} の単調関数である。逆に r_{n+1}——従って a_{n+1}——は区間

$$J_n = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$$

において α の単調関数である。従って α が J_n 全体を動くとき、関数 $a_{n+1}(\alpha)$ は順次値 $1, 2, 3, \ldots$ をとり、区間 J_n を階数 $n+1$ の区間の可算集合へと分割する。この列は n が偶数なら右から左へ動き、n が奇数であれば左から右へと動く。

　従って関数 $a_n(\alpha)$ は、少なくとも量的には、完全に定義された。そこで区間 $(0, 1)$ を（ただ 1 つの）階数 0 の区間と呼ぶことにし、すべての構成済み n 階区間において $n+1$ 階区間の列をおいていくという方法によってそれをより細かな区間の網で覆うことにしよう。この列は n が偶数なら右から左へと取り、n が奇数なら左から右へと取る。関数 $a_{n+1}(\alpha)$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）はこれら $n+1$ 階の区間で定数である。この関

数は単調であり、すべての n 階の区間において 1 から ∞ までのすべての整数値をとる。値の組

$$a_1 = k_1,\ a_2 = k_2,\ \ldots,\ a_n = k_n$$

に対して、階数 n の区間が一意に対応して決まる。そして逆も成り立つ。より一般の値の組

$$a_{m_1} = k_1,\ a_{m_2} = k_2,\ \ldots,\ a_{m_s} = k_s$$

は、一般的にいって、区間の可算集合を定める。

連分数の測度論における最初の問題は、区間 $(0,1)$ における $a_n = k$ となる点の集合の測度を決定するというものである。この集合が互いに素な区間の和であることはすでに分かっている。だから、それらの区間の和を評価する問題である。この問題の解の第 1 近似はきわめて簡単に得られる。

ここから、

$$E\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_s \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}$$

によって区間 $(0,1)$ の点で

$$a_{n_1} = k_1,\ a_{n_2} = k_2,\ \ldots, a_{n_s} = k_s$$

を満たすものの集合を表わすことにしよう。ここで、もちろんすべての n_i や k_i は自然数であり、n_i はすべて異なるとする。これらの集合が常に区間の和集合であることはすでに分かっている。特に、集合

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

は、すでに知っているように、n 階の区間であり、関係

$$a_i = k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

によって特徴づけられる。明らかに、

$$\sum_{k_l=1}^{\infty} E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_l, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_l & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}$$
$$= E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix} \qquad (56)$$

が成立している。

最後に $\mathfrak{M}E$ によって E の測度を表わすことにする。任意の n 階の区間

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

で $n+1$ 階の区間

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n, & s \end{pmatrix}$$

を含むものを考えよう。すでに分かっているように J_n の端点は

$$\frac{p_n}{q_n}$$

と

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$$

である。ただし、p_k/q_k は連分数

$$[k_1, k_2, \ldots, k_n]$$

の k 階の収束子を表わす。他方において、区間 $J_{n+1}^{(s)}$ のすべての点において

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s$$

を満たすから、従って

$$s \leq r_{n+1} < s+1$$

である。従って、区間 J_n のすべての点

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

において $s \leq r_{n+1} < s+1$ を満たすものは区間 $J_{n+1}^{(s)}$ に含まれる。従って、特に $J_{n+1}^{(s)}$ の端点は

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \quad と \quad \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}}$$

である。従って

$$\mathfrak{M}J_n = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

であり、

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{p_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}} \right|$$
$$= \frac{1}{[q_n s + q_{n-1}][q_n(s+1) + q_{n-1}]} = \left| \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)} \right|$$

であるから、

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)}$$

ここで、右辺の第 2 項は明らかに 2 より小さく $\frac{1}{3}$ よりも大きい。（この最後の主張は

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n}} \geq 1 \quad \text{かつ} \quad 1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n} < 3$$

であることから従う。）従って

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2} \tag{57}$$

これより、任意の階数 n の区間に対して $a_{n+1} = s$ で特徴づけられる $n+1$ 階の区間は $1/s^2$ の程度の部分を占めるということが分かる。不等式 (57) で与えられる限界が数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ だけではなく階数 n からも完全に独立である（数 s だけから決定される）という事実は格別に重要である。もしこれらの不等式を

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2}$$

という形で書き、階数 n のすべての区間 J_n について和を取る（同じことであるが $k_1, k_2, \ldots, k_n$ について 1 から ∞ まで和を取る）と、

$$\sum \mathfrak{M}J_n = 1, \quad \sum \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}$$

に注意すれば、

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix} < \frac{2}{s^2}$$

であることが分かる。これは我々の考えている問題の解への第 1 近似を与えている。特定の要素がある与えられた値 s を持つという集合の測度は常に $1/3s^2$ から $2/s^2$ の間である（そして結果として $1/s^2$ の程度の量である）ことが分かるからである。

13　要素の増大の測度論的評価

今や我々は無限の要素を持つ集合の測度に関する問題を解くために必要となる道具を持っている。このような問題の最初の例として次の簡単な定理を証明しよう。

定理 29. $(0,1)$ の中の有界な要素をもつ数の全体は測度 0 である。

証明. 区間 $(0,1)$ における要素がすべて M よりも小さい数すべての集合を E_M を書く。J_n を階数 n の区間で、その点が

$$a_i < M \quad (i = 1, 2, \ldots, M) \tag{58}$$

を満たすようなものとする。区間 J_n の点はさらに $a_{n+1} = k$ の条件を満たせば階数 $n+1$ の区間となる。この区間を $J_{n+1}^{(k)}$ と表わす。(57) の最初の不等式から

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n$$

であるから、結果として

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \sum_{k \ge M} J_{n+1}^{(k)} &> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \ge M} \frac{1}{k^2} \\ &> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)^2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n \end{aligned}$$

であり、

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n$$

であるから

$$\mathfrak{M} \sum_{k < M} J_{n+1}^{(k)} > \left\{ 1 - \frac{1}{3(M+1)} \right\} \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n \tag{59}$$

である。ただし

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M+1)}$$

であり、明らかに $M > 0$ なら $\tau < 1$ である。

$E_M^{(n)}$ で条件 (58) で特徴づけられる区間 $(0,1)$ のすべての数の集合を表わすとき、不等式 (59) によれば階数 n のある区間 J_n に含まれる集合 $E_M^{(n+1)}$ の部分の測度は $\tau \mathfrak{M} J_n$ のものよりも小さい。明らかに階数 n の区間で $E_M^{(n)}$ に含まれない（つまり条

件 (58) を満たさない）ものは $E_M^{(n+1)}$ のどんな点も含むことができないから、不等式 (59) を集合 $E^{(n)}$ の中ですべての階数 n の区間について和を取れば、

$$\mathfrak{M}E_M^{(n+1)} < \tau\mathfrak{M}E_M^{(n)} \tag{60}$$

を得る。順次この不等式を適用すれば

$$\mathfrak{M}E_M^{(n+1)} < \tau^n\mathfrak{M}E_M^{(1)} \quad (n \geq 1)$$

を得るから、結果 $\tau < 1$ と併せて

$$\mathfrak{M}E_M^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である。ところが上で定義した集合 E_M は明らかに各 $E_M^{(n)}$ に含まれている。結果として

$$\mathfrak{M}E_M = 0$$

である。いま

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E$$

をおくと

$$\mathfrak{M}E \leq \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_M = 0$$

を得る。しかし、有界な要素を持つ数は、明らかに十分大きな M によって E_M に含まれ、従って E に含まれるから証明が終わった。 □

我々は（第 2 章の定理 23 によって）有界な要素を持つ数というのは、

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

で許されるよりも良くは有理数で近似できない数 α であることを知っている。（これらにはすべての 2 次無理数も含まれる。）今はこれらのすべての数を集めても測度 0 であることが分かったのである。言い換えれば**ほとんどすべての**数（つまり測度 0 の集合を除いて）は有理数によって最も良く近似される。明らかに、その次の近似の測度論における問題は、ある指定された程度の有理分数近似を持つ数の集合の測度を決定することである。特に、**ほとんどすべての**（上を見よ）数が許容する最良の近似法則というのは何であろうか。言い方を変えれば、測度 0 の数を無視するときに不等式 (61) で与えられる規則を改良するときの制限は何であろうか。この問題は次の節で解決することになる。

定理 30. $\varphi(n)$ を自然数 n を引数とする任意の正値関数とする。もし $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ が発散するならば、不等式

$$a_n = a_n(\alpha) \geq \varphi(n) \tag{62}$$

は、ほとんどすべての α に対して、無限に多くの n によって満たされる。他方、もし $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ が収束するならば、この不等式は、ほとんどすべての α に対して、有限個の n によってのみ満たされる。

予備的注意　特にもし $\varphi(n)$ を定数 M に等しいものとすると、定理 30 から集合 E_M は、これは定理 29 の証明においても用いたものであるが、測度 0 であることが分かる。従って定理 29 は定理 30 の最も単純な場合とみなすことができる。

証明. 定理の最初の主張は定理 29 の証明と完全に同様のやり方で証明される。J_{n+m} を階数 $m+n$ の区間で、そのすべての点が

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{63}$$

を満たすものとする。($a_1, a_2, \ldots, a_m$ にはどんな条件も課さない。) 定理 29 で用いた記号をそのまま用いると、不等式 (59) の類似である

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\} \mathfrak{M} J_{m+n}$$

を得る。

条件 (63) を満たす階数 $m+n$ のすべての区間についてこの不等式を加えると（これらの条件を満たす区間 $(0,1)$ のすべての点からなる集合を $E_{m,n}$ で表わすとする）

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\} \mathfrak{M} E_{m,n}$$

を得る。順次これらを適用すると

$$\mathfrak{M} E_{m,n} < \mathfrak{M} E_{m,1} \prod_{i=2}^{\infty} \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}\right\}$$

となる。もし級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ が発散すると、級数

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}$$

もまた、明らかにすべての m において発散する。無限積の理論によると

$$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}$$

は $n \to \infty$ のときに 0 に近づく。だから、どのような m に対しても

$$\mathfrak{M}E_{m,n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

しかし、

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

となるすべての数 α は明らかに

$$E_{m,n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

すべてに含まれている。従ってこれらの数すべての集合、それを E_m と書くことにすると、その測度は 0 でなければならない。最後に

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_m + \cdots = E$$

とおくと $\mathfrak{M}E = 0$ である。しかし不等式 (62) がただ有限回のみ満たされるすべての α は明らかに、十分大きな m に対しては E_m に、従って E に属さなければならない。これによって定理の第 1 の主張は示された。

さて、$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ が収束すると仮定しよう。J_n な階数 n の区間の 1 つで、その区間に含まれ、さらに $a_{n+1} = k$ の条件によって定義される階数 $n+1$ の区間を $J_{n+1}^{(k)}$ で表わすとする。(57) の第 2 の不等式によると

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2}\mathfrak{M}J_n$$

となるから、

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\sum_{k>\varphi(n+1)} J_{n+1}^{(k)} &< 2\mathfrak{M}J_n \sum_{k>\varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2\mathfrak{M}J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2} \\ &< 2\mathfrak{M}J_n \left\{ \frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} \right\} = \frac{4\mathfrak{M}J_n}{\varphi(n+1)}\end{aligned}$$

である。

そこで区間 $(0,1)$ の数で $a_n \geq \varphi(n)$ を満たすものすべての集合を F_n で表わし、今得られた不等式を階数 n の区間すべてについて足し合わせると

$$\mathfrak{M}F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)}$$

を得る。なぜなら、$\sum \mathfrak{M}J_n = 1$ だからである。従って、集合 $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ の測度は収束級数をなす。区間 $(0,1)$ の数で無限個の F_n に属するものの集合を F と表わすと、

$$\mathfrak{M}F = 0$$

を得る[2]。

しかし、集合 F は、もちろん無限の n に対して不等式 (62) を満たす数の集合にほかならない。これは定理の第 2 の主張を示している。 □

14　収束子の分母の増大の測度論的評価。近似の測度論における基本定理

定理 31. ある正の絶対定数 B で、ほとんど至るところで十分に大きな n に対して

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}$$

となるものが存在する。

予備的注意　第 1 章の第 4 節（定理 12 において、**すべての**数 α に対して分母 q_n は、n が大きくなるに従ってある絶対的な定数比で幾何数列よりも遅く増大することはないということを見た。定理 31 の主張は、**ほとんどすべての**数 α に対して、やはりある絶対的な定数比で何か他の幾何数列よりも速く増大することはないといっている。この状況を他の方法で述べることができる。つまり、ある 2 つの絶対定数 a と A（$1 < a < A$）が存在して、$(0,1)$ のほとんどすべての数 α と十分に大きな n に対して

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A$$

が成立する。

[2] これは測度論でよく知られた定理である。しかしここに証明を記しておく。明らかに F は任意の m に対して $\sum_{n=m}^{\infty} F_n$ に含まれる。後ろの集合の測度は $\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M}F_n$ を越えない。結果として十分に大きな m に対してそれは任意に小さくできる。

実際にはこれよりずいぶん強い命題が成立する。つまり、ある絶対定数 γ が存在して、ほとんど至るところで

$$\sqrt[n]{q_n} \to \gamma \quad (n \to \infty)$$

が成立する。しかしながらこの定理の証明はずいぶん複雑なものであり、いくつかのより強力な道具を必要とする。それらについては 15 節と 16 節で議論する。残念ながら、この本の枠組みにはこの証明[3]を含めることはできない。しかし我々の直接の目的、それは定理 32 として述べるが、そのためには定理 31 の q_n の性質で完全に十分である。

証明. 区間 $(0, 1)$ に含まれる数で

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq g$$

を満たす数の全体を $E_n(g)$（$n > 0, g \geq 0$）で表わす。明らかにこの集合は階数 n の区間を表わしている。これらの区間のいずれも、第 12 節から分かるように、その長さは

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)^2}$$

に等しい。なぜなら明らかな不等式

$$q_n > q_n q_{n-1}$$

を繰り返して用いることで

$$q_n > a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

となるからである。従って

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geq g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \dots a_2^2 a_1^2} \tag{64}$$

が得られる。ただし和は $a_1 a_2 \dots a_n \geq g$ を満たすすべての自然数 $a_1, a_2, \dots a_n$ に組み合わせすべてについて取るものとする。この和を評価するために

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \leq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i+1)} \\ &= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \cdots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1\, dx_2\, \dots\, dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}\end{aligned}$$

---

[3] この定理の証明は 1935 年にヒンチンによって得られた。“Zur metrischen Kettenbruchtheorie,” *Composite Mathematica*, **3**, No. 2, 275–285 (1936) をみよ。そのすぐあとでフランスの数学者 P. レヴィ（Lévy）は定数 γ が具体的に $\ln\gamma = \pi^2/(12\ln 2)$ であることを見つけた。（P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937, p. 320）（B.G.）

であることに注意しよう。従って

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geq g} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right\} \leq 2^n J_n(g)$$

である。ただし $J_n(g)$ は n 重積分

$$\int\int\cdots\int \frac{dx_1\, dx_2\, \dots\, dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}$$

を領域

$$x_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$x_1 x_2 \dots x_n \geq g$$

で取ったものである。

$g \geq 1$ に対してはこの領域は明らかに、領域 $1 \leq x_i < \infty$（$i = 1, 2, \dots, n$）であり、

$$J_n(g) = \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \right\}^n = 1 \tag{65}$$

である。さて、$g > 1$ に対して

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln g)^i}{i\,!} \tag{66}$$

であることを示そう。$n = 1$ に対してはこの式は

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{g}$$

であり、従って正しい。$n = k$ に対して正しいと仮定すると、

$$\begin{aligned} J_{k+1}(g) &= \int_1^\infty \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g}\int_0^g J_k(u)\, du \\ &= \frac{1}{g}\left\{ \int_0^1 J_k(u)\, du + \int_1^g J_k(u)\, du \right\} \end{aligned}$$

を得る。最初の積分において $J_k(u)$ の値に式 (65) のものを代入し、第 2 の積分において式 (66)（$n = k, g \geq 1$ に対して成立すると仮定している）で置き換えれば

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g}\left\{ 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\ln g)^{i+1}}{(i+1)} \right\} = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\ln g)^i}{i\,!}$$

となるから、主張は示されたことになる。従って

$$\mathfrak{M}E_n(g) < \frac{2^n}{g}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\ln g)^i}{i\,!}$$

である。

特に、$A > 1$ を定数として $g = e^{An}$ とおくと

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An}) < e^{n(\ln 2 - A)}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(An)^i}{i\,!}$$

である。この和の各項が

$$\frac{(An)^n}{n\,!}$$

よりも小さいことはすぐに分かるから、スターリン（Stirling）の公式で階乗を近似すると

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}E_n(e^{An}) &< e^{n(\ln 2 - A)} n\frac{(An)^n}{n\,!}\\ &< C_1 e^{n(\ln 2 - A)}\frac{n(An)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} < C_2\sqrt{n}e^{-n(A - \ln A - \ln 2 - 1)}\end{aligned}$$

を得る。ただし C_1 と C_2 は絶対定数である。

ところがもし A が十分に大きければ

$$A - \ln A - \ln 2 - 1 > 0$$

であるから、結果として $\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ はある収束級数の第 n 項よりも小さい。級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}E_n(e^{An})$$

は収束するから、測度 0 の集合を除いて区間 $(0, 1)$ のすべての数はある有限個の集合 $E_n(e^{An})$ にのみ属する。これは区間 $(0, 1)$ のほとんどすべての数に対して、十分に大きな n を取れば

$$a_1a_2\ldots a_n < e^{An}$$

となることを示しており、また

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} < 2a_nq_{n-1}$$

であり、それ故

$$q_n < 2^n a_n q_{n-1}\ldots a_2a_1$$

であることから、ほとんど至るところ、十分に大きな n に対して

$$q_n < 2^n e^{An} = e^{Bn}$$

が従う。ただし $B = A + \ln 2$ である。これで定理 31 の証明は完了である。 □

この結果は、これ自身もまたかなり興味深いものである。ところが今このときとしては、この定理を用いることによって近似の測度論における基本問題に単純な解を得ることができるという特別な重要性がある。

定理 32. $f(x)$ は正の変数 x に関する正値連続関数であるとし、$xf(x)$ は非増大関数であると仮定する。すると不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{67}$$

がほとんどすべての α に対して、整数 p と q（$q > 0$）による無限に多くの解を持つのは、ある定数 c があって積分

$$\int_c^\infty f(x)\,dx \tag{68}$$

が発散するときである。他方、もし積分 (68) が収束するなら不等式 (67) は、ほとんどすべての α に対して有限個の整数解 p と q（$q > 0$）しか持たない。

予備的注意　特に、定理 32 によれば、不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \ln q}$$

は、ほとんど至るところ、無限個の解を持つ。他方不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \ln^{1+\varepsilon} q}$$

は、すべての定数 $\varepsilon > 0$ に対して、ほとんど至るところ、有限個の解しかもたない。これらの事実から、測度 0 の集合を無視するという下で成り立つ一般的な近似法則において、どのような変更が期待されるかということについておおよその理解を得ることができるのである。

証明. **第 1 部**　積分 (68) が発散すると仮定しよう。さらに

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx})$$

と定義する。ただし B は定理 31 における定数である。すると、$A > a > 0$ として積分

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx = \frac{1}{b}\int_{Ba}^{BA} f(u)\,du$$

は $A \to \infty$ で際限なく増大する。仮定によって $\varphi(x)$ は非増大だから、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

は発散する。定理 30 によると、従って、ほとんど至るところ不等式

$$a_{i+1} \geq \frac{1}{\varphi}(i)$$

は無限の i について満たされると結論することができる。しかしこの不等式が満たされるなら、

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leq \frac{a_{i+1} q_i^2}{\leq} \frac{\varphi(i)}{q_i^2} \tag{69}$$

となる。定理 31 によれば、ほとんど至るところ、十分に大きな i に対して

$$q_i < e^{bi}$$

であるから、結局

$$i > \frac{\ln q_i}{B}$$

となる。従って、ほとんど至るところの不等式 (69) によれば

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{\varphi\left(\frac{\ln q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i}$$

が十分に大きな i について満たされる。この不等式は無限に多くの i に対してほとんど至るところで満たされる。これで第 1 の主張が示される。

第 2 部　さて、積分 (68) が、従って級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

が収束すると仮定しよう。区間 $(0,1)$ において、うまく k を選べば不等式

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

が満たされるような数 α の全体を E_n を表わすことにする。(明らかに集合 E_n は中心 $1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$ の長さ $2f(n)/n$ の区間と、区間 $(0, f(n)/n)$ 及び $(1-f(n)/n, 1)$ とからなる。)すると

$$\mathfrak{M}E_n \leq 2f(n)$$

が成立する(記号 $<$ は $f(n) > \frac{1}{2}$ で成り立つ)。従って、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

は収束する。これより、ちょうど以前にやったように、区間 $(0, 1)$ に含まれるほとんどすべての数 α は、有限個の E_n にのみ含まれるということが分かる。これによって区間 $(0, 1)$ のほとんどすべての数 α は不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{f(q)}{q}$$

を十分に大きな正の整数 q と任意の整数 p に対して満たすことが分かる。これは第 2 の主張を示している。 □

次節においては連分数の測度論においてもっと深い問題を解くことが可能になる方法について学ぶ。

15　ガウスの問題とクジミンの定理

我々がいま論じようとしている問題は、歴史的には連分数の測度論における最初の問題であった。この問題はガウス(Gauss)によって提出されたが、1928 年[4]まで解かれなかった。

いつものように

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$
$$r_n = r_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$$

と定め、連分数

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$$

[4]R. O. クジミン(Kuz'min)の "Ob odnoĭzadache Gaussa(ガウスの問題)", *Doklady akad. nauk, ser. A*, 375–380 (1928) をみよ。別の解答がレヴィによる論文 P. Lévym "Sur les lois de probabilité dont dependent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue," *Bull. Soc. Math.*, **57**, 178–194 (1929) で出版された。(B.G.)

の値を $z_n = z_n(\alpha)$ で表わす。つまり、

$$z_n = r_n = a_n$$

とおく。明らかに、常に

$$0 \leq z_n < 1$$

が成立する。区間 $(0, 1)$ の数 α で

$$z_n(\alpha) < x$$

を満たすものの全体からなる集合の測度を $m_n(x)$ で表わす。

ラプラス（Laplace）への手紙の 1 つにおいて、ガウスは

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$$

を意味する定理を証明することに成功したと述べている。この手紙の中では大きな n について差

$$m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \tag{70}$$

を評価を得ることが熱望されていると記しているが、それはできなかった。どうやらガウスは証明を出版しなかったし、クジミン（Kuz'min）が証明と差 (70) に対して良い評価を与えるまでは、他の証明も知られていなかったようである。この節はこの結果の解説とあとで必要となる一般化について述べる[5]。

ガウスによってすでに知られていたことであるが、関数の列

$$m_0(x), m_1(x), m_2(x), \ldots, m_n(x), \ldots$$

は関数方程式

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \quad (0 \leq x \leq 1,\ n \geq 0) \tag{71}$$

を満たす。これを示すには、明らかな関係式

$$a_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

によって、不等式

$$a_{n+1} < x$$

[5]ガウスのように、クジミンはこの結果を確率論の用語で定式化しているが、それはもちろん測度の観点からは内容に影響を与えない。

が満たされるのはただ、うまく選んだ正の整数 k によって

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leq \frac{1}{k}$$

が成り立つとき、またそのときに限るということを注意する。この不等式を満たす数の全体の測度は明らかに

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right)$$

だから関係式 (71) は成立する。

関数

$$\varphi(x) = C\ln(1+x)$$

が任意の定数 C に対して

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\}$$

を満たすということは簡単に直接確かめることができる。これはおそらくガウスが $m_n(x)$ の $n \to \infty$ での極限の関数の適切な表現を見つけるためにも役だったであろう。

式 (71) を形式的に微分すれば

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \tag{72}$$

である。(72) の正しさは厳密な方法で簡単に示すことができる。明らかに $z_0(\alpha) = \alpha$ であるから、$m_0(x) = x$ であり、従って $m'_0(x) = 1$ である。もし一般に関数 $m'_n(x)$ がある n において有界かつ連続であれば (72) の右辺の級数は区間 $(0,1)$ において一様収束する。この級数の和は従って、有界、連続、かつ $m'_{n+1}(x)$ に等しい（よく知られた級数の項別微分定理による）。従って (72) は帰納的に証明される。

式 (72) は式 (71) よりも大変に便利である。今示そうとしているクジミンの基本的な結果はこの関係によらねばならない。

定理 33. 関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ は区間 $(0,1)$ 上定義された実関数列で、この区間上

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \quad (n \geq 0) \tag{73}$$

を満たすとする。もし $0 \leq x \leq 1$ において

$$0 < f_0(x) < M$$

かつ

$$|f_0'(x)| < \mu$$

であるならば、

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \theta A e^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \le x \le 1)$$

である。ただし

$$a = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 f_0(z)\,dz$$

で $|\theta| < 1$ であり、λ は正の絶対定数、A は M と μ にのみ依存する正の定数である。

この証明は複雑である。そこでまずいくつかの基本的な補題を準備する。

補題 3. 任意の $n \ge 0$ に対して

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right)\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \tag{74}$$

である、ただし $(p_n/q, (p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$ は階数 n の任意の区間であり、和はすべての階数 n の区間について（または同じことであるが $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を 1 から ∞ まで）取るものとする。

証明. $n = 0$ に対しては (74) は自明である。なぜなら、$(0,1)$ には $p_0 = 0, q_0 = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ である唯一の区間しかないからである。さて (74) がある n に対して正しいと仮定すると、基本的な式 (73) によって

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + \frac{1}{k+x}p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k+x}q_{n-1}}\right)\frac{1}{\left(q_n + \frac{1}{k+x}q_{n-1}\right)^2}\\
&= \sum^{(n)}\sum_{k=1}^{\infty} f_0\left(\frac{(p_nk + p_{n-1}) + xp_n}{(q_nk + q_{n-1}) + xq_n}\right)\frac{1}{\{(q_nk + q_{n-1}) + xq_n\}^2}\\
&= \sum^{(n+1)} f_0\left(\frac{p_{n+1} + xp_n}{q_{n+1} + xq_n}\right)\frac{1}{(q_{n+1} + xq_n)^2}
\end{aligned}$$

であり、補題を示している。 □

補題 4. 定理 33 の仮定の下で $n \geq 0$ に対して

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M$$

が成り立つ。

証明. 式 (74) を項別に微分すると

$$f_n'(x) = \sum^{(n)} f_0'(u) \frac{(-1)^{n-1}}{(q_nxq_{n-1})^4} - 2\sum^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + xq_{n-1})^3}$$

である。ただし

$$u = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}$$

である。項別に微分したことの正当性は $0 \leq x \leq 1$ にきて右辺の両方の項が一様収束することから従う。

$$\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} < \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

に注意しておく。すると第 1 章の定理 12 から

$$q_n(q_n + q_{n-1}) > q_n^2 > 2^{n-1}$$

であり、明らかな関係式

$$\sum^{(n)} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \sum^{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = 1$$

によれば、定理 33 の条件から

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M$$

であり、これが示すべきことであった。 □

補題 5. もし

$$\frac{t}{1+x} < f_n(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であれば

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

である。

証明. 補題の条件から、基本的な式 (73) によると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{1+\frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2} < f_{n+1}(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1+\frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2}$$

または

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)}$$

または、同値であるが、

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right)$$

または、結果として

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x}$$

となり、これが示すべきことであった。 □

補題 6.

$$\int_0^1 f_n(z)\,dz = \int_0^1 f_0(z)\,dz \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

証明. 基本的な式 (73) によると（$n > 0$ に対して）

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right) \frac{dz}{(k+z)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)\,du = \int_0^1 f_{n-1}(u)\,du\end{aligned}$$

が成り立つから補題は帰納法により従う。 □

定理 *33* の証明. 関数 $f_0(x)$ は仮定によって微分可能であり、従って $0 \le x \le 1$ で連続である。再び仮定からそれは区間上正であるから、ある正の最小値 m を持たねばならない。条件 $m \le f_0(x) < M$（$0 \le x \le 1$）から

$$\frac{m}{2(1+x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1+x} \quad (0 \le x \le 1)$$

あるいは

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x} \quad (0 \le x \le 1)$$

ただし

$$g = \frac{m}{2}, \quad G = 2M$$

が成り立つ。

さて、

$$f_n(x) - \frac{g}{q+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \le x \le 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と定義する。補題 5 によると関数 $F(x) = g/(1+x)$ は

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1}{(k+x)^2}$$

を満たす（直接確認して簡単に示すことができる）。これから明らかに関数の列

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

は (73) を満たす。従ってこの式から導かれる条件、特に (74) は正しい。前と同様にして簡単のために

$$u = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}$$

とおく。すると

$$\varphi_n(x) = \sum^{(n)} \varphi_0(u)\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2}$$

であるから、結果として明らかな不等式

$$q_n + xq_{n-1} \le q_n + q_{n-1} < 2q_n \text{ かつ } \varphi_0(u) > 0$$

を用いれば

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2}\sum^{(n)} \varphi_0(u)\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \tag{75}$$

を得る。

他方で平均値の定理によれば

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz = \frac{1}{2}\varphi_0(u')\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \tag{76}$$

である。ただし u' は区間 $(p_n/q_n, (p_n+p_{n-1})/(q_n+q_{n-1}))$ のある一点であり、$1/[q_n(q_n+q_{n-1})]$ はこの区間の長さである。関係式 (75) と (76) によれば

$$\varphi_n(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz > \frac{1}{2}\sum^{(n)} \{\varphi_0(u) - \varphi_0(u')\}\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \tag{77}$$

である。しかし、明らかに

$$|\varphi_0(x)| \le |f_0'(x)| + g < \mu + g \quad (0 \le x \le 1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu+g)|u-u'| &< \frac{\mu+g}{q_n(q_n+q_{n-1})} \\ &< \frac{\mu+g}{q_n^2} < \frac{\mu+g}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

が分かる。すると不等式 (77) によって

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz - \frac{\mu+g}{2^n} = l - \frac{\mu+g}{2^n}$$

である。ただし

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz$$

従って

$$f_n(x) > \frac{g}{1+x} + l - \frac{\mu+g}{2^n} > \frac{g+l-2^{-n+1}(\mu+g)}{q+x} = \frac{g_1}{1+x}$$

を得る。

さて関数の列

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を調べるときには、今と同じ議論をふまえて不等式

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu+G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x}$$

を得る。ただし

$$l' = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,dz$$

である。$l > 0$ かつ $l' > 0$ であるから、十分に大きな n に対して

$$g < g_1 < G_1 < G$$

かつ

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G)$$

を得る。また、

$$l + l' = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{G-g}{1+z}\,dz = (G-g)\frac{\ln 2}{2}$$

であるから、

$$G_1 - g_1 < (G-g)\delta + 2^{-n+2}(\mu + G)$$

である。ただし

$$\delta = 1 - \frac{\ln 2}{2} < 1$$

は絶対定数である。

今まで得られた結果を要約しよう。**次の条件**

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}, \quad |f_0'(x)| < \mu$$

から、十分大きな n **に対して**

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x}$$

であることを示した。ただし、

$$g < g_1 < G_1 < G, \quad G_1 - g_1 < (G-g)\delta + 2^{-n+2}(\mu + G)$$

である。もし今 $f_0(x)$ の代わりに $f_n(x)$ から出発するなら、今の議論を繰り返して

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x}$$

かつ

$$\begin{gathered} g_1 < g_2 < G_2 < G_1, \\ G_2 - g_2 < \delta(G_1 - g_1) + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1) \end{gathered}$$

である。ただし μ_1 は

$$|f_n'(x)| < \mu_1 \quad (0 \le x \le 1)$$

となる正の数である。この過程をさらに進めていけば、一般に

$$\frac{g_r}{1+x} < f_{rn}(x) < \frac{G_r}{1+x} \quad (0 \le x \le 1; r = 0, 1, 2, \ldots$$

かつ $r > 0$ に対して

$$\begin{gathered} g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1} \\ G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}) \end{gathered} \tag{78}$$

が分かる。ただし μ_{r-1} は

$$|f_{(r-1)n}'(x)| < \mu_{r-1} \quad (0 \le x \le 1)$$

を満たす正の数である。補題 4 によると

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

であるから、結果として n を十分に大きく選べば

$$\mu_r < 5M \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

となる。従って不等式 (78) を繰り返して適用することで（$r = 1, 2, \ldots, n$ に対して）

$$G_n - g_n < (G-g)\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu+2M)\delta^{n-1} + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \cdots + 7M\delta + 7\}$$

を得る。$\delta < 1$ は絶対定数であるから明らかに

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n}$$

が従う。ただし $\lambda > 0$ は絶対定数であり $B > 0$ は M と μ にのみ依存する。

　これから、まず最初に共通の極限

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} = a$$

が存在することと

$$\left| f_{n^2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \quad (0 \le x \le 1) \tag{79}$$

であることが従い、結果として特に

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\,dz \to a \ln 2 \quad (n \to \infty)$$

であり、結果として補題 6 によって

$$a = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 f_0(z)\,dz$$

である。

　最後に

$$n^2 \le N < (n+1)^2$$

と仮定しよう。不等式 (79) によると

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n^2}(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x}$$

であり、補題 5 から

$$\frac{a-2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a+2Be^{-\lambda n}}{1+x}$$

あるいは

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} < Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}}$$

が従う。ただし $A = 2Be^{\lambda}$ である。この不等式は、十分に大きな N に対して成立することが示されたものであるが、十分に大きな定数 A を選べば明らかに $N \geq 0$ に対して正しい。これは定理 33 の証明を完了している。 □

さてガウスの問題に戻ろう。

$$f_n(x) = m_n'(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とおくと $f_0(x) \equiv 1$ である。従って定理 33 の条件はすべて満たされている。従って

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{(1+x)\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1) \tag{80}$$

となり、従って、積分することで

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を得る。ただし A と λ は正の絶対定数である。これはガウスの主張を証明しているばかりではなく、剰余項についてもよい近似を与えている[6]。

さて、この結果を用いて十分に大きな n に対して $a_n = k$ となる点の集合の測度に対する近似を得ることにしよう。明らかに条件 $a_n = k$ は不等式

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leq \frac{1}{k}$$

に同値であるから、

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m_{n-1}'(x)\,dx$$

[6] レヴィが用いた方法によればよりよい近似を与えることができる。彼は

$$m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} < Ae^{-\lambda n} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を与えた。(B.G.)

がわかる。不等式 (80) によれば

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{n}{k}-\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2}\right|<\frac{A}{k(k+1)}e^{-\lambda\sqrt{n-1}} \tag{81}$$

である。従って、13 節におけるかなり粗い不等式しかなかった量 $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$ に対して正確な極限の関係式が分かる。つまり、

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k}\to\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2}\quad(n\to\infty)$$

である。従って、たとえば $a_n=1$ となるような点の集合の測度は $n\to\infty$ のときに

$$\frac{\ln 4-\ln 3}{\ln 2}$$

に近づく。

ガウスの主張を証明することに加えて、定理 33 からより一般的な結果を得ることができる。このことの重要性は下で述べる。ある階数 k の区間で条件 $z_{k+n}<x$ を満たすある固定された区間に属する数の全体の測度を $M_n(x)$ で表わす。言い換えれば、$M_n(x)$ は区間 $(0,1)$ において

$$a_1=r_1,\quad a_2=r_2,\quad\ldots,\quad a_k=r_k;\quad z_{k+n}<x \tag{82}$$

の条件を満たす数の全体からなる集合の測度である。ただし $r_1,r_2,\ldots,r_k$ はある固定された自然数で $n\geq 0$ と x（$0\leq x\leq 1$）は任意に変わることができる。

条件 (82) が満たされるためには、明らかに

$$a_1=r_1,\quad a_2=r_2,\quad\ldots,\quad a_k=r_k;\quad \frac{1}{r+x}<z_{k+n-1}\leq\frac{1}{r}$$

が必要十分である。ただし r はある自然数である。すると

$$M_n(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)-M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right)\right\}\quad(n\geq 1,\ 0\leq x\leq 1)$$

であるから、関数の列 $M_0'(x),M_1'(x),\ldots,M_n'(x),\ldots$ は式 (73) を満たす。

区間 $(p_k/q_k,(p_k+p_{k-1})/(q_k+q_{k-1}))$ の任意の数 α は

$$\alpha=\frac{p_kr_{k+1}+p_{k-1}}{q_kr_{k+1}+q_{k-1}}$$

あるいは $z_k = 1/r_{k+1}$ だから

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}}$$

と表わされる。$z_k < x$ に対しては数 α は p_k/q_k と $(p_k + xp_{k-1})/(q_k + xq_{k-1})$ の間になければばならない。従って

$$M_0(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + xp_{k-1}}{q_k + xq_{k-1}} \right| = \frac{x}{q_k(q_k + q_{k-1}x)} \tag{83}$$

が成り立つ。

ここで

$$M_n(x) = \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} \chi_n(x) \quad (n \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1)$$

とおくと新しい関数の列

$$\chi_0(x), \chi_1(x), \ldots, \chi_n(x), \ldots$$

を得る。ここで、関数 $\chi_n'(x)$ は対応する $M_n'(x)$ と定数だけ異なるものであるから、やはり (73) を見なす。明らかに

$$\mathfrak{M}E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}$$

であるから、式 (83) から

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})x}{q_k + q_{k-1}x}$$

であって

$$\chi_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^2}$$

かつ

$$\chi_0''(x) = -\frac{2q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^3}$$

である。従って

$$\frac{1}{2} < \chi_0'(x) < 2, \quad |\chi_0''(x)| < 4 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

となる。

これから分かることは、定理 33 は関数列 $\chi_n'(x)$ に適用できるということである。ただし定数 A と λ は任意の定数である（特に $r_1, r_2, \ldots, r_k$ に独立である）。従って

$$\chi_n'(x) = \frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{1}{(1+x)\ln 2} + \theta A e^{-\lambda\sqrt{n}}, \quad |\theta| < 1$$

を得る。この関係式を r を任意の自然数として極限 $1/(r+1)$ と $1/r$ の間で積分すると、$|\theta'| < 1$ に対して

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n}}$$

を得、また明らかに

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right) = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix} = \left(\frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} + \frac{\theta' A e^{-\lambda\sqrt{n}}}{r(r+1)}\right)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}$$

となる。

最後に、この関係式をある数 $r_1, r_2, \ldots, r_k$（任意に選ばれる）について 1 から ∞ まで加えることができる。この足し合わせの結果、式の両辺の添え字のようなものを持つ項は消え、連続する添え字 $1, 2, \ldots, k$ の代わりに完全に任意の添え字 $n_1, n_2, \ldots, n_t$ の並びを得る。そのほかには式は全く何も変わらない。従って次の定理を得る。

定理 34. 2 つの正の絶対定数 A と λ が存在して $n_1 < n_2 < \cdots < n_t < n_{t+1}$ と任意の正の整数 $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$ に対して

$$\left|\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t, & n_{t+1}\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t, & r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t\end{pmatrix}} - \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\right| < \frac{A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}}$$

が成り立つ。

この定理から分かることは、区間 $(0,1)$ の中の $a_n = r$ を満たす数全体の測度が $n \to \infty$ である定まった極限に近づくということだけではなく、その前の任意の要素の任意の固定した値によって与えられる条件を満たす数全体の相対測度が同じ極限に近づくということである。

16　平均値

前節の結果から我々は次のような一般的な命題を証明することができる[7]。

定理 35. $f(r)$ は自然数 r に関する非負関数であり、ある定数 C と δ があって

$$f(r) < Cr^{\frac{1}{2}-\delta} \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

を満たすものとする。すると区間 $(0,1)$ の測度 0 の集合を除いたすべての点で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \tag{84}$$

を満たす。

予備的注意　式 (84) の右辺に級数の収束は、もちろん、関数 $f(r)$ の条件から従う。

証明. 次のように定義をしよう。

$$\int_0^1 f(a_k)\, d\alpha = u_k, \quad \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\, d\alpha = b_k,$$
$$\int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\{f(a_k) - u_k\}\, d\alpha - g_{ik}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \{f(a_k) - u_k\} = s_n = s_n(\alpha)$$

これらのすべての積分が存在することは、関数 $f(r)$ に対して仮定した性質から簡単に分かる。なぜなら、

$$\{f(r)\}^2 < C^2 r^{1-2\delta}$$

であるから

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \{f(r)\}^2 \mathfrak{M}E\binom{k}{r} < 2C^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1$$

[7] この節の結果はヒンチンの論文 “Metrische Kettenbruchprobleme,” *Composito Mathematica*, **1**, 361–382 (1935) にある。（B.G.）

は意味を持つ。その結果すべての積分が存在することはブニャコフスキー（Bunyakovskiĭ）–シュヴァルツ（Schwarz）不等式から従う。特に

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha - u_k^2 < C_1, \\ u_k &= \int_0^1 f(a_k)\, d\alpha < \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha} < \sqrt{C_1} \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

が従う。さらに $k > i$ に対して明らかに

$$g_{ik} = \int_0^1 f(a_i) f(a_k)\, d\alpha - u_i u_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s) \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix} - u_i u_k \tag{86}$$

が成り立つ。ところが定理 34 と第 12 節の不等式によると

$$\begin{aligned} &\left| \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix} - \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\ln 2} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \right| \\ &\qquad < \frac{A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \\ &\qquad < 3A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{87}$$

かつ

$$\left| \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} - \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\ln 2} \right| < \frac{A e^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3A e^{-\lambda\sqrt{k-1}} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \tag{88}$$

を得る。不等式 (88) に $\mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}$ を掛け、不等式 (87) の結果と比較すると

$$\left| \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix} - \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \right| < 6A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}$$

を得、その結果として (86) によると

$$\begin{aligned} &\left| g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(s) f(s) \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} + u_i u_k \right| \\ &\qquad < 6A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \sum_{r,s=1}^{\infty} f(s) f(s) \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(s)f(s)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = u_i u_k$$

に注意し、(85) の第 2 の不等式を用いてこの式の右辺を評価すると

$$|g_{ik}| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}u_i u_k < 6AC_1 e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \tag{89}$$

を得る。

式 (85) と (89) から、$n > m > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (s_n - s_m)^2\,d\alpha &= \int_0^1 \left\{\sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k)\right\}^2 d\alpha \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\,d\alpha \\
&\quad + 2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\{f(a_k) - u_k\}\,d\alpha \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} < C_1(n-m) \\
&\quad + 12AC_1 \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2(n-m)
\end{aligned} \tag{90}$$

が成り立つ。ただし C_2 なある新しい正の定数である。

さて、e_n によって区間 $(0,1)$ の中の数で

$$|s_n| \geq \varepsilon n$$

を満たす数全体の集合を表わす。ただし ε は任意の与えられた正の定数である。明らかに

$$\int_0^1 s_n^2\,d\alpha \geq \int_{e_n} s_n^2\,d\alpha \geq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M}e_n$$

であるから不等式 (90)（$m = 0$ として）によって

$$\mathfrak{M}e_n \leq \frac{\int_0^1 s_n^2\,d\alpha}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}$$

となる。

従って級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} e_{n^2}$$

が収束し、従って結果として、分かっているように、区間 $(0,1)$ のほとんどすべての数は $n=1,2,3,\ldots$ に対して有限個の e_{n^2} にしか属さない。これが意味することは、区間 $(0,1)$ のほとんどすべての数と十分に大きな n に対して

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon$$

が成り立つということであり、ε は任意に小さいからほとんど至るところ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0 \tag{91}$$

ということである。さらに $n^2 \leq N < (n+1)^2$ に対して公式 (90) から

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})\, d\alpha < C_2(N-n^2) < C_2(2n+1) \leq 3C_2 n$$

が分かる。そこで区間 $(0,1)$ の数で $|s_N - s_{n^2}| \geq \varepsilon n^2$ を満たす数の全体を $e_{n,N}$ と表わすことにし、

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n,N}\ E_n$$

をおくと、$n^2 \leq N < (n+1)^2$ に対して

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2\, d\alpha \geq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2\, d\alpha > \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N}$$

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{eC_2}{\varepsilon^2 n^3}$$

$$\mathfrak{M} E_n \leq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leq \frac{9C_2}{\varepsilon^2 n^2}$$

を得るから、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$ は収束する。すると区間 $(0,1)$ のほとんどすべての数は E_n の有限個の集合にのみ属さねばならず、従って有限個の $e_{n,N}$ にのみ属する。しかしこれは区間 $(0,1)$ のほとんどすべての数が不等式

$$|s_N - s_{n^2}| > \varepsilon n^2$$

を十分に大きな n と $n^2 \leq N < (n+1)^2$ に対して満たすことを意味する。言い換えれば、ほとんど至る所において

$$\frac{|s_N - s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon$$

が十分に大きな n と $n^2 \leq N < (n+1)^2$ に対して成立する。ε は任意に小さくとれるから、ほとんど至るところ

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty,\ n^2 \leq N < (n+1)^2)$$

がわかる。式 (91) によれば、するとほとんど至るところ

$$\frac{s_N}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty,\ n^2 \leq N < (n+1)^2)$$

であるから、従って、まして

$$\frac{S_N}{N} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

が分かる。言い換えれば、ほとんど至るところ

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{92}$$

が成立する。ところがこの節の公式 (81) によれば

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \right|$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} - \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 e^{-\lambda\sqrt{k}}$$

である。ただし A_1 は新しい正の定数である。従って

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (k \to \infty)$$

であり、結果として

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (N \to \infty)$$

である。そして関係 (92) から

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}$$

が区間 $(0,1)$ でほとんど至るところ成立することが分かる。これで定理 35 の証明は完了である。 $\square$

　この命題によって、ほとんどすべての無理数によって満たされる連分数の大変多くの性質を導くことができる。たとえば

$$f(r) = 1 \quad r = k \text{ のとき、かつ } f(r) = 0 \quad r \neq k \text{ のとき}$$

とおく。ただし k はある（任意の）自然数である。この場合、和

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

は明らかに与えられた連分数の最初の n 個の要素の中で k が現れる回数を表わしている。他方で比

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

は与えられた連分数の最初の n 個の要素の中での k の密度を表わしている。最後に極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(k)}{n} = d(k)$$

はもしこれが存在すれば、与えられた連分数の要素のすべての列の中での k の密度と解釈するのが自然である。

　定義した関数 $f(n)$ は明らかに定理 35 のすべての要請を満たすから、この定理によって我々は**任意の k に対してこの密度はほとんど至るところ存在し、ほとんど至るところ同じ密度を持つ**ということを結論できる。さらに同じ定理によってその密度を計算することができる。明らかにほとんど至る所

$$d(1) = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 2}, \quad d(2) = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2}, \quad d(3) = \frac{\ln 16 - \ln 15}{\ln 2}$$

などである。従って任意の自然数はほとんどすべての数の展開における要素に等しい平均頻度で現れる。

　もう一つの興味深い結果は

$$f(r) = \ln r \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおいて得られる。こうすると定理 35 のすべての条件は満たされる。従ってほとんど至るところ

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln a_i \to \sum_{r=1}^{\infty} \ln(r) \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (n \to \infty)$$

あるいは同値であるが

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to \prod_{r=1}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}}$$

である。従って最初の n 個の要素の幾何平均は $n \to \infty$ のときにほとんど至るところ絶対定数

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}} = 2.6\ldots$$

に収束する。

明らかに、定理 35 によって平均値に関するほかの形の級数全体に関して類似の結果を導くことができる。しかし、この方法によって算術平均

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{93}$$

を調べることは不可能である。なぜなら対応する関数 $f(r) = r$ は定理 35 の条件を満たさないからである。しかしながらもっと基本的な考察によってほとんど至るところ式 (93) がどんな意味でも有限の極限を持たないことが簡単に分かる。なぜなら、定理 30（13 節）によれば無限に多くの n についてほとんど至るところ

$$a_n > n \ln n$$

であり、従ってましてや

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \ln n \quad 従って、\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i < \ln n$$

である。

それ故、式 (93) はほとんど至るところ非有界であり、従ってすでに述べたように、有限な極限を持つことができない。